

對畢氏三元數公式的一番探索

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

§ 0. 楔 子

過年期間翻閱科學月刊1995年1月號，讀到同事蔡聰明先生的“談費瑪最後定理”一文，其中有關畢氏三元數的那段文字，引起了我的注意。原文如下（引文略作了一些更動，以配合下文的敘寫）：

“滿足方程式(1)的任何一組正整數解答 (x, y, z) 就叫做一組畢氏三元數，例如 $(3, 4, 5)$ ， $(5, 12, 13)$ ， $(119, 120, 169)$ 都是畢氏三元數。

$$x^2 + y^2 = z^2 \dots\dots\dots(1)$$

畢氏三元數不但存在，而且有無窮多組。更神奇的是，它們可以用公式表達出來。我們將(1)式的答案列於下：

1. 畢氏公式

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1 \dots\dots\dots(2)$$

2. 柏拉圖公式

$$x = 2m, y = m^2 - 1, z = m^2 + 1 \dots\dots\dots(3)$$

在(2)與(3)兩式中， n 與 m 皆為自然數。不過，兩式都沒有窮盡所有之解答。

3. 歐氏的完全解答公式：

$$x = \ell(m^2 - n^2), y = \ell(2mn), z = \ell(m^2 + n^2) \dots\dots\dots(4)$$

其中 m, n, ℓ 皆為自然數，且 $m > n$ 。(4)式窮盡了(1)式所有的解答。”

其實，這段文字並不稀奇，在很多本初等整數論的書中可以看到，我在大學時代就曾看過。但當時年輕，學習的態度太過急切，只要是正確的知識就毫不質疑全盤接受，並不問“為什麼這樣？”也不追究“為什麼會這樣？”現在年事漸長，而且過年無事，看到這段文字，比較有閒情來探索下列問題。

問題 1 畢氏公式和柏氏公式不能窮盡，有例子嗎？

問題 2 為什麼歐氏公式能窮盡(1)式的所有解答？這個公式又是怎樣出來的？

§ 1. 公式的初步分析

問題 1 的解答很容易，蔡文中已給了例子 $(119, 120, 169)$ 。為什麼這個例子是畢氏公式和柏氏公式的反例呢？因為滿足畢氏公式的畢氏三元數 (x_1, y_1, z_1) 中， $z_1 = 2n^2 + 2n + 1 = (2n^2 + 2n) + 1 = y_1 + 1$ ；而滿足柏氏公式的畢氏三元數 (x_2, y_2, z_2) 中， $z_2 = m^2 + 1 = (m^2 - 1) + 2 = y_2 + 2$ 。 $(119, 120, 169)$ 顯然並沒有上述關係。

事實上，在上面所展示的三個公式中，歐氏公式和另兩公式不同，因為它把倍數解也列進去了，這是很大的改進。因為

事實 1 (1)式 $x^2 + y^2 = z^2$ 是文字 x, y, z 的齊次方程式，所以(1)式的任意一組解 (α, β, γ) 的倍數 $(t\alpha, t\beta, t\gamma)$ ，也是(1)式的解。

這裡所說的倍數，其實是向量意味下的倍數 $t(\alpha, \beta, \gamma) = (t\alpha, t\beta, t\gamma)$ ，本事實的證明只要將 $(t\alpha, t\beta, t\gamma)$ 代入即可：設 t 為參數，則

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow (t\alpha)^2 + (t\beta)^2 = t^2(\alpha^2 + \beta^2) = t^2\gamma^2 = (t\gamma)^2$$

由於畢氏公式和柏氏公式並不是齊次式，所以由它們所產生的解，其倍數並不滿足原來的公式。

例 1 1° 在畢氏公式中，令 $n = 1$ 得到 $(3, 4, 5)$ ，其 2 倍 $(6, 8, 10)$ 不滿足畢氏公式； $6 \neq 10 - 1$ ， $8 \neq 10 - 1$ 。

2° 在柏氏公式中令 $m = 4$ 代入得 $(8, 15, 17)$ ，其 2 倍 $(16, 30, 34)$ 不滿足柏氏公式： $16 \neq 34 - 2$ ， $30 \neq 34 - 2$ 。

由此看來，畢氏公式和柏氏公式之不能窮盡，反例並不假外求，其公式之不周延顯而易見。反觀歐氏公式，放棄畢氏和柏氏只用一個自變數的方式，改採兩個自變數 m 和 n ，並將 x, y 與 z 表達成 m 和 n 的二次齊公式，使得另外乘上一個倍數參數 ℓ 後也滿足公式。兩者相較，優劣立見。

當然，以上的分析，並不足以證明歐氏公式能窮盡(1)式所有的解，只能說明歐氏改進了畢氏和柏氏的缺點而已。怎樣才能說明歐氏公式能夠窮盡呢？恐怕需要作進一步的探索來加以澄清。

首先，歐氏公式既然已把倍數考慮進來，我們只要檢驗解中的三數互質之原解 (primitive solutions) 就可以了。例如， $(3, 4, 5)$ ， $(5, 12, 13)$ ， $(8, 15, 17)$ ， $(119, 120, 169)$ 就是(1)式的原解，而 $(6, 8, 10) = 2(3, 4, 5)$ ， $(25, 60, 65) =$

$5(5, 12, 13), (32, 60, 68) = 4(8, 15, 17), (357, 360, 507) = 3(119, 120, 169)$ 則不是(1)的原解。在這種考慮下，我們也可以將歐氏公式減少一個參數，簡化成歐氏(簡化)公式

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2 \dots\dots\dots(5)$$

其中 $m > n$ 都是自然數。

於是我們原先考慮的問題 2，變成了如下的

問題 3 (5)式能窮盡(1)式的所有原解嗎？

§ 2. 一點啓示

同事曹亮吉先生最近寫了一本書，書名好像叫做數學思維與解題。尚未出版，我也還未見到手寫的稿本，但他去年在師大數學系作過一次演講，內容非常精彩。他有次和我閒聊的時候，提到其中一段的內容，是利用國中生成都熟知的平方公式，窮盡畢氏三元數的解。他的這段話，此時當然給我很大的啓示：

畢氏三元數 (α, β, γ) 中，自然有 $\gamma > \alpha, \gamma > \beta$ 。若令 α 爲自變數，而 $\gamma - \alpha = t$ 爲參數，則 β 和 γ 都可以表達成 α 和 t 如下：

$$\gamma = \alpha + t, \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \sqrt{2\alpha t + t^2}。$$

若我們令 $t = 1, 2, \dots$ 則這樣當然能窮盡所有的解。既然有此領悟，自然立刻進行實驗。所謂進行實驗，當然不可能將 $t = 1, 2, \dots$ 等無窮多種狀況都加以窮盡。這樣做的原因是希望能對各種 t 進行歸類，使我們能做一般性的推論。我對 100 以內的 t 所做的實驗結果，使我歸納出如下結果：

事實 2 設 $(\alpha, \beta, \alpha + t)$ 爲畢氏三元數， $t \leq 100$ ，則

1° $(\alpha, \beta, \alpha + t)$ 爲(1)式原解的情形是

$$t = 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, \text{ 或者}$$

$$t = 2 \times 1^2, 2 \times 2^2, 2 \times 3^2, 2 \times 4^2, 2 \times 5^2, 2 \times 6^2, 2 \times 7^2。$$

2° 在其他情形下 $(\alpha, \beta, \alpha + t)$ 都不是(1)式的原解。

讓我們舉幾個例子說明。事實上，同類的 t ，推論的過程都差不多。所以，不在下面的例子中，而讀者又有興趣時，不妨從各類型的 t 中各選一個，自行實驗看看。這樣也可以在讀下文時更有感覺。

例 2 設 $t = 8 = 2 \times 2^2$ ，而 $(\alpha, \sqrt{16\alpha + 64}, \alpha + 8)$ 爲一個畢氏三元數。因 $\sqrt{16\alpha + 64} = 4\sqrt{\alpha + 4}$ ，故 $\alpha + 4$ 爲平方數，其前幾個案例如下：

$x = 5$ 時, $\sqrt{\alpha+4} = 3$, 得到 $(5, 4 \times 3, 5+8) = (5, 12, 13)$

$x = 12$ 時, $\sqrt{\alpha+4} = 4$, 得到 $(12, 4 \times 4, 12+8) = (12, 16, 20) = 4(3, 4, 5)$

$x = 21$ 時, $\sqrt{\alpha+4} = 5$, 得到 $(21, 4 \times 5, 21+8) = (21, 20, 29)$

$x = 32$ 時, $\sqrt{\alpha+4} = 6$, 得到 $(32, 4 \times 6, 32+8) = (32, 24, 40) = 8(4, 3, 5)$

$x = 45$ 時, $\sqrt{\alpha+4} = 7$, 得到 $(45, 4 \times 7, 45+8) = (45, 28, 53)$

其中 $(12, 16, 20)$ 和 $(32, 24, 40)$ 都不是原解, 而 $(5, 12, 13)$ 則可由 $t=1$ 時得出。上面得到的新原解只有 $(21, 20, 29)$ 和 $(45, 28, 53)$ 。當然, 繼續做下去, 還可以得到許多新的原解。

例3 設 $t = 9 = 3^2$, 而 $(\alpha, \sqrt{18\alpha+81}, \alpha+9)$ 爲一畢氏三元數。因 $\sqrt{18\alpha+81} = 3\sqrt{2\alpha+9}$, 故 $2\alpha+9$ 爲平方數, 其前幾個案例如下:

$x = 8$ 時, 得 $(8, 15, 17)$; 可由 $t = 2$ 時得到;

$x = 20$ 時, 得 $(20, 21, 29)$; 可由 $t = 8$ 時得到;

$x = 36$ 時, 得 $(36, 27, 45) = 9(4, 3, 5)$ 不是原解;

$x = 56$ 時, 得 $(56, 33, 65)$ 是個新的原解;

$x = 80$ 時, 得 $(80, 39, 89)$ 也是個新的原解。

同理, 繼續做下去, 應該還可以得到許多新的原解。

例4 當 t 不是某奇數的平方, 或某平方數的 2 倍時, 譬如說 $t = 4 = 2^2$, 或 $t = 5$, 或 $t = 12$ 時, $(\alpha, \sqrt{2\alpha t + t^2}, \alpha + t)$ 都不是(1)的原解:

1° $t = 4 = 2^2$ 的情形。若 $(\alpha, \sqrt{8\alpha+16}, \alpha+4)$ 爲畢氏三元數, 則因爲 $\sqrt{8\alpha+16} = 2\sqrt{2(\alpha+2)}$ 爲自然數, $\alpha+2$ 一定是 2 的倍數 (如此 2 才能開方出來), 即 $\alpha+2 = 2b^2 \Rightarrow \alpha = 2d$, 但如此則

$$(\alpha, \sqrt{8\alpha+16}, \alpha+4) = 2(d, b, d+2)$$

故 $(\alpha, \sqrt{8\alpha+16}, \alpha+4)$ 不是(1)式的原解。

2° $t = 5$ 的情形。若 $(\alpha, \sqrt{10\alpha+25}, \alpha+5)$ 爲畢氏三元數, 則因

$\sqrt{10\alpha+25} = \sqrt{5(2\alpha+5)}$ 爲自然數, 故 $2\alpha+5$ 一定得爲 5 的倍數 (5 才能開方出來), 即 $2\alpha+5 = 5b^2 \Rightarrow 2\alpha = 5(b^2-1)$, 但 2 與 5 互質, 所以 α 必然是 5 的倍數, 即 $\alpha = 5d$, 但此時

$$(\alpha, \sqrt{10\alpha+25}, \alpha+5) = 5(d, b, d+1)$$

故 $(\alpha, \sqrt{10\alpha+25}, \alpha+5)$ 不是(1)式之原解。

3° $t = 12$ 的情形。若 $(\alpha, \sqrt{24\alpha+144}, \alpha+12)$ 為畢氏三元數，則因 $\sqrt{24\alpha+144} = 2\sqrt{6(\alpha+6)}$ 為自然數，故 $\alpha+6$ 一定得為 6 之倍數（如此 6 才能開方出來），即 $\alpha+6 = 6b^2 \Rightarrow \alpha = 6(b^2-1)$ ，故

$$(\alpha, \sqrt{24\alpha+144}, \alpha+12) = 6(b^2-1, 2b, b^2+1)$$

不再是(1)式的原解。

§ 3. 結果的一般化

以上我們對 100 以內的 t 做了個別的檢討，也歸納出了下列比較一般性的猜測：

猜測 設 $(\alpha, \beta, \alpha+t)$ 為畢氏三元數， α, β 與 t 為自然數，則

1° 若 $t = (2q+1)^2$ ，或 $t = 2n^2$ 時， $(\alpha, \beta, \alpha+t)$ 可能是(1)式的原解；

2° 若 t 不為上述的情形時， $(\alpha, \beta, \alpha+t)$ 一定不是(1)式的原解。

要證明這樣猜測時，我們首先注意到 2° 可以仿照例 4，分成幾個狀況加以證明，而且證明方式也和例 4 的特例非常相像。

事實 3 設 $t = (2n)^2$ ，而 $(\alpha, \sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}, \alpha+(2n)^2)$ 為畢氏三元數，則此解不是(1)式的原解。

證明 因為 $\sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4} = 2n\sqrt{2(\alpha+2n^2)}$ 是個自然數，因此 $\alpha+2n^2$ 必需為 2 的倍數，即 $\alpha+2n^2 = 2b^2 \Rightarrow \alpha = 2(b^2-n^2)$
 $\Rightarrow (\alpha, \sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}, \alpha+(2n)^2) = 2(b^2-n^2, 2nb^2, b^2+n^2)$
 所以， $(\alpha, \sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}, \alpha+(2n)^2)$ 不是(1)式的原解。

事實 4 設 $t = ar^2$ ，其中 a 不再含有大於 1 的平方因數，而且存在一個奇數的質數 p ，使得 $a = pb$ （因此 p 與 b 互質），則 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)$ 不是(1)式的原解。

證明 $\sqrt{2\alpha t+t^2} = \sqrt{2ar^2\alpha+a^2r^4} = r\sqrt{a(2\alpha+ar^2)}$
 $= r\sqrt{pb(2\alpha+pbr^2)}$ 是個自然數，故 $b(2\alpha+pbr^2)$ 是 p 的倍數（如此 p 才能開方出來）。但 b 與 p 互質，因此 $2\alpha+pbr^2$ 應該是 p 的倍數，即 $2\alpha+pbr^2 = pd \Rightarrow 2\alpha = p(d-br^2)$ ，且 2 與 p 互質 $\Rightarrow \alpha = pc$ 。但如此則 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t) = p(c, \sqrt{bd}, c+br^2)$
 即 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)$ 不再是個(1)式的原解。

上面，我們成功地將產生原解的狀況局限於 $t = (2q+1)^2$ 和 $t = 2n^2$ 的兩種

狀況。但這兩種狀況為什麼可以寫成歐氏簡化公式？但我暫時並不想急於對上述兩種狀況進行分析，只讓我的思維處於散漫游離的散鬆狀態。

在上述的探索過程中，我觀察到一個粗淺的次要現象，即若畢氏三元數 (x, y, z) 為一原解，則此三數中一定有 2 個奇數，而只有一個偶數。我之所以會用“粗淺次要”的形容詞，原因是奇偶數其實只是表面現象。如果將“偶數”改成“2 的倍數”，這個現象就能一般化如下了：

事實 5 設 p 為一個質數，則畢氏三元數 (x, y, z) 及(1)式原解的充份必要條件是，此三數中只能有一數是 p 的倍數。換句話說， x, y, z 三數是兩兩互質的。

證明 設 $x = pa$ ， $y = pb$ ，則 $z^2 = x^2 + y^2 = p^2(a^2 + b^2)$ 。由於 p 是一個質數，所以，若 z 不是 p 的倍數時， z^2 也不可能是 p 的倍數。因此， z 是 p 的倍數，即 $z = pc$ 。如此則 $(x, y, z) = p(a, b, c)$ 不是(1)式的原解。

若 $x = pa$ ， $z = pc$ ，則 $y^2 = z^2 - x^2 = p^2(c^2 - a^2)$ 。此時可作如上述的平行推論。若 $y = pb$ ， $z = pc$ 時，也同理可證。

§ 4. 一些聯想

上面我之會觀察到為原解的畢氏三元數中奇數和偶數的個數，除了奇數，偶數很容易被注意到之外，另外的原因是我湊巧知道奇數有一些可資利用的模式，譬如說，

$$3 = 2^2 - 1^2, 5 = 3^2 - 2^2, 7 = 4^2 - 3^2, \dots$$

這些模式剛好與歐氏公式中的 $x = m^2 - n^2$ 型式相合。既然為原解的畢氏三元數中，較小的兩數中的一數是個奇數，不妨令為 x 。由此我們可以問下面的兩個問題。

問題 4 設為原解的畢氏三元數 (x, y, z) 中， x 為最小的奇數。若 x 為已知，是否此畢氏三元數就由歐氏公式唯一地確定呢？

問題 5 為原解的畢氏三元數 (x, y, z) 中，最大的數 z 可以是個偶數嗎？

問題 5 很容易回答。設 $x = 2\alpha + 1$ ， y 若為偶數，則 x^2 為奇數， y^2 為偶數，所以 $z^2 = x^2 + y^2$ 為奇數，故 z 也為奇數。若 $x = 2\alpha + 1$ ， $y = 2\beta + 1$ ，則 x^2 和 y^2 也都為奇數， $\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ 為偶數，設 $z = 2r$ ，則代入如下，就可以看到矛盾了。

$$x^2 + y^2 = z^2 = (2r)^2 = 4r^2 \text{ (爲 4 的倍數)}$$

||

$$4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \dots \text{(不爲 4 的倍數)}$$

由上述推論，知道在一個為原解的畢氏三元數 (x, y, z) 中， z 一定是個奇數，若 x 為

奇數，則 y 一定是個偶數。

問題4的解答也不困難，只要找到一個反例就可以了。但在下面，我們多給一個案例，並用歐氏公式，產生相應的畢氏三元數。希望能從這些案例中，看到一些可以一般化的規律。

例5 1° $15 = 8^2 - 7^2$, $2 \times 8 \times 7 = 112$, $8^2 + 7^2 = 113$, 得 $(15, 112, 113)$;
 $15 = 4^2 - 1^2$, $2 \times 4 \times 1 = 8$, $4^2 + 1^2 = 17$, 得 $(15, 8, 17)$ 。

2° $3 \times 5 \times 7 = 105 = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15$

$$105 = 1 \times 105 = \left(\frac{105+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{105-1}{2}\right)^2 = 53^2 - 52^2, \text{得}$$

$$(105, 2 \times 53 \times 52, 53^2 + 52^2) = (105, 5512, 5513)$$

$$105 = 3 \times 35 = \left(\frac{35+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{35-3}{2}\right)^2 = 19^2 - 16^2, \text{得}$$

$$(105, 2 \times 19 \times 16, 19^2 + 16^2) = (105, 608, 617)$$

$$105 = 5 \times 21 = \left(\frac{21+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{21-5}{2}\right)^2 = 13^2 - 8^2, \text{得}$$

$$(105, 2 \times 13 \times 8, 13^2 + 8^2) = (105, 208, 233)$$

$$105 = 7 \times 15 = \left(\frac{15+7}{2}\right)^2 - \left(\frac{15-7}{2}\right)^2 = 11^2 - 4^2 \text{得}$$

$$(105, 2 \times 11 \times 4, 11^2 + 4^2) = (105, 88, 137)$$

從上例中，我們看到奇數 x 只要能分解成兩數的乘積（包含 $x = 1 \cdot x$ 在內），就可以寫成兩平方差的型式：設 $x = (2p+1)(2q+1)$, $p \geq q$, 則

$$x = \left[\frac{(2p+1)+(2q+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{(2p+1)-(2q+1)}{2} \right]^2$$

而這樣的資訊正是我們需要的。下面，我將這個知識和上述兩類產生(1)式原解的情況 $t = (2r+1)^2$ 和 $t = 2n^2$ 結合在一起，進行系統性的分析。

§ 5. 進一步的分析

設 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t + t^2}, \alpha + t)$ 是(1)式的原解。先討論 $t = 2n^2$ 的情形。事實上，我對 $t = 2 \times 1^2 = 2$, $t = 2 \times 2^2 = 8$, $t = 2 \times 3^2 = 18$, $t = 2 \times 4^2 = 32$, $t = 2 \times 5^2 = 50$, $t = 2 \times 6^2 = 72$, $t = 2 \times 7^2 = 98$ 都作了分析。但這些情形的規律非常強，所

以我們只要看 $t = 2 \times 1^2 = 2$ 和 $t = 2 \times 3^2 = 18$ 的情形就可見其一般的狀況了。我們除了注意到為原解的畢氏三元數中最小奇數寫成平方差的規律外，同時利用歐氏公式求出該解，以便得到其一般規律。

例6 $t = 2 \times 1^2 = 2$ 的情形。 $\sqrt{2\alpha t + t^2} = \sqrt{4\alpha + 4} = 2\sqrt{\alpha + 1}$ 為自然數，故最前面的幾個 α 值為 $\alpha = 3, \alpha = 15, \alpha = 35, \alpha = 63$ 。這些案例如下：

$\alpha = 3$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 2 \times 2 = 4, \alpha + t = 3 + 2 = 5$ ，得 $(3, 4, 5)$

此時 $3 = 1 \times 3 = (2-1)(2+1) = 2^2 - 1^2, 4 = 2 \times 2 \times 1, 5 = 2^2 + 1^2$

$\alpha = 15$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 2 \times 4 = 8, \alpha + t = 15 + 2 = 17$ ，得 $(15, 8, 17)$

此時 $15 = 3 \times 5 = (4-1)(4+1) = 4^2 - 1^2, 8 = 2 \times 4 \times 1, 17 = 4^2 + 1^2$

$\alpha = 35$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 2 \times 6 = 12, \alpha + t = 35 + 2 = 37$ ，得 $(35, 12, 37)$

此時 $35 = 5 \times 7 = (6-1)(6+1) = 6^2 - 1^2, 12 = 2 \times 6 \times 1, 37 = 6^2 + 1^2$

$\alpha = 63$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 2 \times 8 = 16, \alpha + t = 63 + 2 = 65$ ，得 $(63, 16, 65)$

此時 $63 = 7 \times 9 = (8-1)(8+1) = 8^2 - 1^2, 16 = 2 \times 8 \times 1, 65 = 8^2 + 1^2$

一般而言，若令 $m = \sqrt{\alpha + 1}$ ，則 $\alpha = m^2 - 1^2, \beta = \sqrt{2\alpha t + t^2} = 2\sqrt{\alpha + 1} = 2m$ ，

$\gamma = \alpha + t = (m^2 - 1) + 2 = m^2 + 1$ ，即其一般型式為如下的柏氏公式

$$(m^2 - 1, 2m, m^2 + 1)$$

例7 $t = 2 \times 3^2 = 18$ 的情形。 $\sqrt{2\alpha t + t^2} = \sqrt{2 \times 18\alpha + 18^2} = 6\sqrt{\alpha + 3^2}$ 為自然數，其最前面的 α 值為 $\alpha = 7, 27, 55$ 和 91 ，案例分析如下：

$\alpha = 7$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 6 \times 4 = 24, \alpha + t = 7 + 18 = 25$ ，得 $(7, 24, 25)$

此時 $7 = 1 \times 7 = (4-3)(4+3) = 4^2 - 3^2, 24 = 2 \times 4 \times 3, 25 = 4^2 + 3^2$

$\alpha = 27$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 6 \times 6 = 36, \alpha + t = 27 + 18 = 45$ ，得 $(27, 36, 45)$

此時 $27 = 3 \times 9 = (6-3)(6+3) = 6^2 - 3^2, 36 = 2 \times 6 \times 3, 45 = 6^2 + 3^2$

$\alpha = 55$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 6 \times 8 = 48, \alpha + t = 55 + 18 = 73$ ，得 $(55, 48, 73)$

此時 $55 = 5 \times 11 = (8-3)(8+3) = 8^2 - 3^2, 48 = 2 \times 8 \times 3, 73 = 8^2 + 3^2$

$\alpha = 91$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 6 \times 10 = 60, \alpha + t = 91 + 18 = 109$ ，得 $(91, 60, 109)$

此時 $91 = 7 \times 13 = (10-3)(10+3) = 10^2 - 3^2, 60 = 2 \times 10 \times 3, 109 = 10^2 + 3^2$

一般而言，若令 $m = \sqrt{\alpha + 3^2}$ ，則 $\alpha = m^2 - 3^2, \beta = \sqrt{2\alpha t + t^2} = 6\sqrt{\alpha + 3^2} = 6m$ ，

$\gamma = \alpha + t = (m^2 - 3^2) + 2(3^2) = m^2 + 3^2$ ，即其一般型為

$$(m^2 - 3^2, 6m, m^2 + 3^2)$$

由這兩個例子，我們不難推廣到一般的情形，如下：

設 $t = 2n^2$ ，而 $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \sqrt{2\alpha t + t^2}, \alpha + t)$ 為畢氏三元數，則 $\sqrt{2\alpha t + t^2} = \sqrt{4n^2\alpha + 4n^4} = 2n\sqrt{\alpha + n^2}$ 為自然數。若令 $m = \sqrt{\alpha + n^2}$ ，則 $\alpha = m^2 - n^2$ ， $\beta = \sqrt{2\alpha t + t^2} = 2n\sqrt{\alpha + n^2} = 2nm$ ，而 $\gamma = \alpha + t = (m^2 - n^2) + 2n^2 = m^2 + n^2$ ，換句話說，其一般型就是如下的歐氏之簡化公式

$$(m^2 - n^2, 2nm, m^2 + n^2)$$

§ 6. 另一類的例子

下面分析 $t = (2q+1)^2$ 的情形，我雖然分析了 $t = 1^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 和 9^2 的各種情形，但如同上述的，規律性很強，只要舉 2 個案例即可看到其一般狀況。

例 8 $t = 5^2$ 的情形。 $\sqrt{2\alpha t + t^2} = \sqrt{2 \times 5^2 \alpha + 5^4} = 5\sqrt{2\alpha + 5^2}$ 為自然數，其最小的幾個 α 值為 $\alpha = 12, 28, 48$ 和 72 。這些 α 不是奇數，但沒關係， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 5\sqrt{2\alpha + 5^2}$ 一定是個奇數。案例分析如下：

$\alpha = 12$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 5 \times 7 = 35$ ， $12 + 5^2 = 37$ ，得 $(12, 35, 37)$

此時 $35 = 5 \times 7 = (6-1)(6+1) = 6^2 - 1^2$ ， $12 = 2 \times 6 \times 1$ ， $37 = 6^2 + 1^2$

$\alpha = 28$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 5 \times 9 = 45$ ， $28 + 5^2 = 53$ ，得 $(28, 45, 53)$

此時 $45 = 5 \times 9 = (7-2)(7+2) = 7^2 - 2^2$ ， $28 = 2 \times 7 \times 2$ ， $53 = 7^2 + 2^2$

$\alpha = 48$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 5 \times 11 = 55$ ， $48 + 5^2 = 73$ ，得 $(48, 55, 73)$

此時 $55 = 5 \times 11 = (8-3)(8+3) = 8^2 - 3^2$ ， $48 = 2 \times 8 \times 3$ ， $73 = 8^2 + 3^2$

$\alpha = 72$ 時， $\sqrt{2\alpha t + t^2} = 5 \times 13 = 65$ ， $72 + 5^2 = 97$ ，得 $(72, 65, 97)$

此時 $65 = 5 \times 13 = (9-4)(9+4) = 9^2 - 4^2$ ， $72 = 2 \times 9 \times 4$ ， $97 = 9^2 + 4^2$

一般而言， $\sqrt{2\alpha + 5^2}$ 是個奇數。因為若 $\sqrt{2\alpha + 5^2} = 2k$ ，則 $2\alpha + 5^2 = 4k^2$ ，得到

奇數等於偶數的矛盾。所以不妨令 $\sqrt{2\alpha + 5^2} = 2\ell + 1$ ，等號兩邊平方得

$2\alpha + 5^2 = 4\ell^2 + 4\ell + 1$ ， $\alpha = 2(\ell^2 + \ell - 6) = 2(\ell + 3)(\ell - 2)$ 。

令 $n = \ell - 2$ ，則 $\alpha = 2(\ell + 3)(\ell - 2) = 2(n+5)n = 2n(n+5)$ 。此時，

$\sqrt{2\alpha t + t^2} = 5\sqrt{2\alpha + 5^2} = 5(2\ell + 1) = 5(2n+4+1) = 10n+25$

$= (n+5)^2 - n^2$ ，而 $\alpha + t = 2n(n+5) + 25 = (n^2 + 10n + 25) + n^2$

$= (n+5)^2 + n^2$ 。故其一般型式為

$$((n+5)^2 - n^2, 2n(n+5), (n+5)^2 + n^2)$$

例 9 $t = 7^2$ 的情形。 $\sqrt{2\alpha t + t^2} = \sqrt{2 \times 7^2 \alpha + 7^4} = 7\sqrt{2\alpha + 7^2}$ 為自然數，其最小的幾個 α 值為 $\alpha = 16, 36, 60$ 和 88 。案例分析如下：

$\alpha=16$ 時, $\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 9=63$, $16+7^2=65$, 得 $(16, 63, 65)$

此時 $63=7\times 9=(8-1)(8+1)=8^2-1^2$, $16=2\times 8\times 1$, $65=8^2+1^2$

$\alpha=36$ 時, $\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 11=77$, $36+7^2=85$, 得 $(36, 77, 85)$

此時 $77=7\times 11=(9-2)(9+2)=9^2-2^2$, $36=2\times 9\times 2$, $85=9^2+2^2$

$\alpha=60$ 時, $\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 13=91$, $60+7^2=109$, 得 $(60, 91, 109)$

此時 $91=7\times 13=(10-3)(10+3)=10^2-3^2$, $60=2\times 10\times 3$, $109=10^2+3^2$

$\alpha=88$ 時, $\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 15=105$, $88+7^2=137$, 得 $(88, 105, 137)$

此時 $105=7\times 15=(11-4)(11+4)=11^2-4^2$, $88=2\times 11\times 4$, $137=11^2+4^2$

一般而言, $\sqrt{2\alpha+7^2}$ 為奇數, 理由如前例。故不妨令 $\sqrt{2\alpha+7^2}=2\ell+1$,

兩邊平方得 $2\alpha+7^2=4\ell^2+4\ell+1\Rightarrow\alpha=2(\ell^2+\ell-12)=2(\ell-3)(\ell+4)$ 。

令 $\ell-3=n$, 則 $\alpha=2(\ell-3)(\ell+4)=2n(n+7)$ 。此時, $\sqrt{2\alpha t+t^2}=$

$7\sqrt{2\alpha+7^2}=7(2\ell+1)=7(2n+7)=2\times 7n+7^2=(n+7)^2-n^2$, 而且

$\alpha+t=2n(n+7)+7^2=(n^2+2\times 7n+7^2)+n^2=(n+7)^2+n^2$ 。故其一般

型式為

$$((n+7)^2-n^2, 2n(n+7), (n+7)^2+n^2)$$

由上面的兩個例子, 我們就可以推到一般情形了。設 $t=(2q+1)^2$; 而

$(\alpha, \beta, \gamma)=(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)$ 為畢氏三元數, 則 $\sqrt{2\alpha t+t^2}=$

$(2q+1)\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}$ 為自然數, 而且 $\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}$ 為一個奇數。不

妨令 $\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}=2\ell+1$, 則有 $2\alpha=4\ell^2+4\ell+1-(4q^2+4q+1)$ 或者

$\alpha=2[(\ell^2-q^2)+(\ell-q)]=2(\ell-q)(\ell+q+1)$ 。令 $\ell-q=n$ 作為自變參數, 則

$\alpha=2n(n+2q+1)$ 。此時

$$\sqrt{2\alpha t+t^2}=(2q+1)\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}=(2q+1)(2\ell+1)=(2q+1)(2n+2q+1)$$

$$=2n(2q+1)+(2q+1)^2=[n+(2q+1)]^2-n^2$$

$$\alpha+t=2n(n+2q+1)+(2q+1)^2=2n^2+2n(2q+1)+(2q+1)^2$$

$$=[n+(2q+1)]^2+n^2$$

所以, 其一般型式為

$$([n+(2q+1)]^2-n^2, 2n(n+2q+1), [n+(2q+1)]^2+n^2)$$

若令 $n+(2q+1)=m$, 則其型式改變成歐氏的簡化公式

$$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$$

到此為止, 我們證明了, 若 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)$ 為一個畢氏三元數, 而且是

(1)式的原解，則它就可以寫成歐氏簡化公式的樣子。這個結論，算是回答了歐氏公式能窮盡(1)式之解的問題。至於歐氏公式的由來，上面的導引過程能不能對此問題作合理呢？這我就不太能判斷了。

§ 7. 結 語

這是我在民國 84 年初過農曆年時的某天晚上，實在是閒極無聊（租來的錄影帶太難看），只好拿這樣的數學題目來自尋開心。而這樣的解題痕跡，似乎值得紀念，所以寫成此文，希望讀者不以粗淺見棄。

寫成此文時，有一些不安心。因為最大的解題關鍵是曹亮吉先生的一句話，所以在這裡特別提出來說明。至於曹亮吉未出版的書上，跟這段有關的部分會不會太過雷同呢？（如此，本文就算是抄襲的了），我想應該不會才對。為什麼呢？因為我知道他寫文章的風格，喜歡簡潔輕巧不像我的文章這樣囉嗦嘮叨。

這裡稍為對我的寫作風格作一些交待。一般在寫學術論文時，當然應該寫的簡潔，儘量減少不必要的廢話。如此，本文在進入 § 2 時，就應該直接將畢氏三元數 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t + t^2}, \alpha + t)$ 就 $t = ar^2$ （其中 a 不含大於 1 的平方因數）分成下列三類來處理：

- 1° $a = 1$ ，又分成 $r = 2q + 1$ （即 § 6）和 $r = 2p$ （即 § 3 的事實 3，其最後的式子又是歐氏公式）。
- 2° $a = 2$ （即 § 5 的情形）。
- 3° $a > 2$ （即 § 3 的事實 4）。

並不需要談到(1)式的原解。但本文是寫給中學數學老師和中學生看的，我就寧願慢慢的從許多實際的例子出發，歸納出一般結果，再加一些證明。這樣的文章是不嚴謹的，但可以流露出我在思考問題時的一些想法和嘗試（常是錯誤的）。有些讀者對這些比對文章裡所呈現的知識更有興趣些。我想，希望那類讀者喜歡閱讀你的文章的權衡與取捨，就是構成每個作者寫作風格的重要關鍵吧！

★