

臺北市八十三學年度 高級中學數學及自然學科競賽 數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學數學系

壹、一、台北市複賽試題(一)

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
第一題十二分、第二題十二分、第三題十二分、第四題十三分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題一 若 $p > 5$ 且 p 、 $p+2$ 、 $p+6$ 與 $p+8$ 都是質數，試證： $p+4$ 是 15 的倍數。

問題二 考慮與 Y 軸及圓 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 都相切的所有公切圓，試求這些公切圓的圓心所成圖形的方程式，並就半徑 r 的值討論這方程式所表示的圖形。

問題三 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 上的點，且都不是頂點。過 D 分別作 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 的平行線，各交 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 於 G 與 H 。設 $\overline{GH}$ 分別交 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 於 R 與 S ， $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P 。若

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{BE}} = \lambda, \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{CF}} = \mu,$$

試證：

- (1) $\lambda + \mu < 1$ 。
- (2) $\triangle PRS$ 與 $\triangle DRS$ 的面積之比與 D 的位置無關，並求其比值。

問題四 設 $\langle a_k \rangle$ 為一數列，且每個 a_k 都滿足 $a_k \geq k$ 。試證：對每個正整數 $n > 1$ ，恆有

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} > \frac{n}{2} \sqrt[n]{n!}。$$

二、台北市複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共七題，滿分為二十一分，每題三分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題一 若 $x > 0$ ， $y > 0$ 且 $x + y = 24$ ，則 $\log_4 x + \log_2 y$ 的最大值為_____。

問題二 $\cos \frac{\pi}{31} \cos \frac{2\pi}{31} \cos \frac{4\pi}{31} \cos \frac{8\pi}{31} \cos \frac{16\pi}{31}$ 的值等於_____。

問題三 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 中選四個相異數字做為八位數 ****1776 的首四位數字，則所得的八位數中可被 176 整除者共有幾個？_____。

問題四 若 n 為正整數且 $n > 1$ ，則 $4n$ 位整數 $99 \cdots 9799 \cdots 9700 \cdots 0400 \cdots 04$ 的正平方根為_____，其中的 $99 \cdots 9$ 與 $00 \cdots 0$ 都各有 $n-1$ 位。

問題五 若正整數 m 與 n 滿足 $2(3^m - 2) = n(n-5)$ ，則所有的解 (m, n) 為_____。

問題六 若 n 為正整數，則二項式係數 $C_1^{2n}, C_3^{2n}, \cdots, C_{2n-1}^{2n}$ 等 n 個整數的最大公因數為_____。

問題七 在 $\triangle ABC$ 中， D, E, F 分別為 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上的點， $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 L ， $\overline{CF}$ 與 $\overline{AD}$ 交於 M ， $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 N 。若 $\triangle ABC$ 的面積是 $\triangle LMN$ 面積的兩倍，且滿足

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \lambda,$$

則 λ 的值等於_____。

《 參考解答 》

壹、一、台北市複賽試題(一)

問題一 因為 $p, p+1$ 與 $p+2$ 是三個連續整數，所以，三數中必有一個是 3 的倍數。因為 p 與 $p+2$ 是大於 5 的質數，所以， $p+1$ 是 3 的倍數。於是， $p+4$ 是 3 的倍數。

其次， $p+2, p+3, p+4, p+5$ 與 $p+6$ 是五個連續整數，所以，五數中必

有一個是 5 的倍數。因為 $p+2$ 與 $p+6$ 是大於 5 的質數，所以， $p+3$ 、 $p+4$ 與 $p+5$ 中必有一個是 5 的倍數。另一方面， p 與 $p+8$ 是大於 5 的質數，它們不是 5 的倍數。因此， $p+5$ 與 $p+3$ 不是 5 的倍數。於是， $p+4$ 是 5 的倍數。

綜合兩段的結果，可知 $p+4$ 是 15 的倍數。

問題二 當 $r < 1$ 時， y 軸與圓 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 的所有公切圓圓心都在 y 軸右方。其中與 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 外切的圓的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x+r$ 或 $y^2 = 2(r+1)x + r^2 - 1$ ；與 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 內切的圓的圓心構成拋物物線 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x-r$ 或 $y^2 = 2(1-r)x + r^2 - 1$ 。兩拋物線都是開口向右。

當 $r = 1$ 時， y 軸與圓 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 相切於原點。因此，與 y 軸相切於原點的所有圓都是 y 軸與 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 的公切圓，它們的圓心構成 x 軸。除了這些圓之外，其他的公切圓都與 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 外切，它們的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x+1$ 或 $y^2 = 4x$ 。

當 $r > 1$ 時， y 軸與圓 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 相交於 $(0, \sqrt{r^2-1})$ 與 $(0, -\sqrt{r^2-1})$ 。因此，公切圓分成四類：在 y 軸左側或右側，與 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 內切或外切。（請注意：內切時，公切圓在圓 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 的內部。）於是，在 y 軸右側而外切的公切圓與在 y 軸左側而內切的公切圓，它們的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = r+x$ 或 $y^2 = 2(r+1)x + r^2 - 1$ ，其開口向右。在 y 軸右側而內切的公切圓與在 y 軸左側而外切的公切圓，它們的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = r-x$ 或 $y^2 = 2(1-r)x + r^2 - 1$ ，其開口向左。

問題三 (1) 因為 $\frac{PE}{BE} = \lambda$ ，所以， $\triangle APC$ 與 $\triangle ABC$ 的面積之比為 λ ，亦即：

$$\frac{a \triangle APC}{a \triangle ABC} = \lambda。同理，\frac{a \triangle ABP}{a \triangle ABC} = \mu。因爲$$

$$a \triangle APC + a \triangle ABP = a \triangle ABC - a \triangle PBC < a \triangle ABC，$$

所以， $\lambda + \mu < 1$ 。

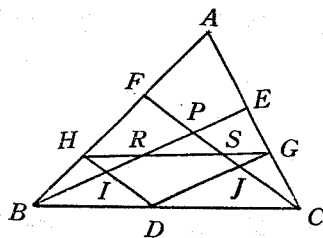
(2) 設 $\overline{DH}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 I ， $\overline{DG}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 J 。

因爲 $\overline{BE} \parallel \overline{DG}$ ，所以， $\frac{HR}{HG} = \frac{HI}{HD}$ 。因爲 $\overline{CF} \parallel \overline{DH}$ ，所以，得

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{CF}}。於是，得$$

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{CF}} = \mu, \frac{\overline{HR}}{\overline{HG}} = \mu。同理，$$

$$\frac{\overline{GS}}{\overline{HG}} = \lambda。因爲 \triangle PRS \sim \triangle IRH，$$



$$所以，\frac{a \triangle PRS}{a \triangle IRH} = \left(\frac{\overline{RS}}{\overline{HR}} \right)^2 = \left(\frac{1-\lambda-\mu}{\mu} \right)^2。因爲 \frac{\overline{DH}}{\overline{IH}} = \frac{1}{\mu}，所以，$$

$$\frac{a \triangle DRS}{a \triangle IRH} = \frac{\overline{RS}}{\overline{HR}} \times \frac{\overline{DH}}{\overline{IH}} = \frac{1-\lambda-\mu}{\mu} \times \frac{1}{\mu} = \frac{1-\lambda-\mu}{\mu^2}。$$

$$由此得 \frac{a \triangle PRS}{a \triangle DRS} = 1-\lambda-\mu，此值與 D 的位置無關。$$

問題四 因爲
$$\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 - a_1^2}{a_n + a_1}$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_1) = 0$$

所以，得

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} = \frac{a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_1^2}{a_n + a_1}。$$

只須證明

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1} > n \sqrt[n]{n!}。$$

因爲 $2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2$ 對任意實數 a 與 b 都成立，所以，

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} \geq \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1} \geq \frac{a_n + a_1}{2}。$$

於是，得

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1} &\geq \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \cdots + \frac{a_n + a_1}{2} \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq n \sqrt[n]{n!}。 \end{aligned}$$

若
$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1} = n \sqrt[n]{n!}，$$

則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 且 $a_1 a_2 \cdots a_n = n!$ ，前者得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ，後者得 $a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_n = n$ 。當 $n > 1$ 時，此二結果互相矛盾。

二、台北市複賽試題(二)

問題一 $\frac{11}{2}$

因爲 $\log_4 x + \log_2 y = \log_4 x y^2$ ，而

$$\sqrt[3]{x \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}} \leq \frac{1}{3} \left(x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \right) = \frac{24}{3} = 8$$

所以， $x y^2 \leq 4 \cdot 8^3 = 2^{11}$ ， $\log_4 x y^2 \leq \log_4 2^{11} = \frac{11}{2}$ 。換言之，所求最大值爲 $\frac{11}{2}$ 。

問題二 $-\frac{1}{32}$

設所求值爲 k ，則

$$\begin{aligned} k \sin \frac{\pi}{31} &= \sin \frac{\pi}{31} \cos \frac{\pi}{31} \cos \frac{2\pi}{31} \cos \frac{4\pi}{31} \cos \frac{8\pi}{31} \cos \frac{16\pi}{31} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{31} \cos \frac{2\pi}{31} \cos \frac{4\pi}{31} \cos \frac{8\pi}{31} \cos \frac{16\pi}{31} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{31} \cos \frac{4\pi}{31} \cos \frac{8\pi}{31} \cos \frac{16\pi}{31} \\ &= \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{31} \cos \frac{8\pi}{31} \cos \frac{16\pi}{31} \\ &= \frac{1}{16} \sin \frac{16\pi}{31} \cos \frac{16\pi}{31} \\ &= \frac{1}{32} \sin \frac{32\pi}{31} = -\frac{1}{32} \sin \frac{\pi}{31} \end{aligned}$$

於是， $k = -\frac{1}{32}$ 。

問題三 36

因爲1776與10000都是16的倍數，所以，不論前四位****是任何數，

****1776都是16的倍數，我們只須考慮該八位數被11整除即可。設此八位數寫成 $abcd1776$ ，則此數被11整除的充要條件是 $a+c+1+7=b+d+7+6$ 或 $a+c+1+7=(b+d+7+6)-11$ 。

$a+c+1+7=b+d+7+6$ 或 $a+c=b+d+5$ 的情況有： $a+c=8$ 且 $b+d=3$ ，或 $a+c=9$ 且 $b+d=4$ ，或 $a+c=10$ 且 $b+d=5$ ，或 $a+c=11$ 且 $b+d=6$ 。

(1) 若 $a+c=8$ 且 $b+d=3$ ，則 $\{a, c\}=\{3, 5\}$ 且 $\{b, d\}=\{1, 2\}$ 。共4解。

(2) 若 $a+c=9$ 且 $b+d=4$ ，則 $\{a, c\}=\{4, 5\}$ 且 $\{b, d\}=\{1, 3\}$ 。共4解。

(3) 若 $a+c=10$ 且 $b+d=5$ ，則 $\{a, c\}=\{4, 6\}$ 且 $\{b, d\}=\{2, 3\}$ 。共4解。

(4) 若 $a+c=11$ 且 $b+d=6$ ，則 $\{a, c\}=\{5, 6\}$ 且 $\{b, d\}=\{2, 4\}$ 。共4解。

$a+c+1+7=(b+d+7+6)-11$ 或 $a+c+6=b+d$ 的情況有： $a+c=3$ 且 $b+d=9$ ，或 $a+c=4$ 且 $b+d=10$ ，或 $a+c=5$ 且 $b+d=11$ 。

(5) 若 $a+c=3$ 且 $b+d=9$ ，則 $\{a, c\}=\{1, 2\}$ 且 $\{b, d\}=\{3, 6\}$ 或 $\{4, 5\}$ 。共8解。

(6) 若 $a+c=4$ 且 $b+d=10$ ，則 $\{a, c\}=\{1, 3\}$ 且 $\{b, d\}=\{4, 6\}$ 。共4解。

(7) 若 $a+c=5$ 且 $b+d=11$ ，則 $\{a, c\}=\{1, 4\}$ 或 $\{2, 3\}$ 且 $\{b, d\}=\{5, 6\}$ 。共8解。

綜合以上結果，可知****1776可被176整除者共36個。

問題四 $99 \cdots 9899 \cdots 98$ ($99 \cdots 9$ 共 $n-1$ 位)

$$99 \cdots 9799 \cdots 9700 \cdots 0400 \cdots 04$$

$$=(10^{4n}-10^{3n+1})+7 \times 10^{3n}+(10^{3n}-10^{2n+1})+7 \times 10^{2n}+4 \times 10^n+4$$

$$=10^{4n}-2 \times 10^{3n}-3 \times 10^{2n}+4 \times 10^n+4$$

$$=(10^{2n}-10^n-2)^2。$$

因此，所求正平方根爲 $10^{2n}-10^n-2=99 \cdots 9899 \cdots 98$ ，其中的 $99 \cdots 9$ 共有 $n-1$ 位。

問題五 $(2, 7), (3, 10)$

因爲 $2 \times 3^n = n^2 - 5n + 4 = (n-1)(n-4)$ ，所以，可得

(1) 若 n 爲奇數，則可令

$$n-1=2 \times 3^t, \quad n-4=3^{m-t}。$$

於是，得 $3 = 2 \times 3^t - 3^{m-t}$ 。由此知 $t > 0$ 且 $m - t > 0$ 。再由

$$1 = 2 \times 3^{t-1} - 3^{m-t-1} \text{ 得 } t = 1, m = 2, n = 7。$$

(2) 若 n 為偶數，則可令

$$n - 1 = 3^t, \quad n - 4 = 2 \times 3^{m-t}。$$

於是，得 $3 = 3^t - 2 \times 3^{m-t}$ 。由此知 $t > 0$ 且 $m - t > 0$ 。再由

$$1 = 3^{t-1} - 2 \times 3^{m-t-1} \text{ 得 } t = 2, m = 3, n = 10。$$

問題六 2^{k+1} ，其中 $n = 2^k q$ ， q 是奇數。

因為 $C_1^{2n} + C_3^{2n} + \cdots + C_{2n-1}^{2n} = 2^{2n-1}$ ，所以， $C_1^{2n}, C_3^{2n}, \dots, C_{2n-1}^{2n}$ 的最大公因數必是 2^t 之形式。設 $n = 2^k q$ ，其中 q 是奇數， $k \in \mathbb{Z}$ ， $k \geq 0$ 。

對每個 $m = 1, 2, \dots, n$ ，因為

$$C_{2m-1}^{2n} = \frac{2n}{2m-1} C_{2m-2}^{2n-1} = \frac{2^{k+1} q}{2m-1} C_{2m-2}^{2n-1}$$

而 $(2m-1, 2^{k+1}) = 1$ ，所以， $q C_{2m-2}^{2n-1}$ 是 $2m-1$ 的倍數。於是， 2^{k+1} 是 C_{2m-1}^{2n} 的因數。因為 $2n = 2^{k+1} q$ 不是 2^{k+2} 的倍數，所以， $C_1^{2n}, C_3^{2n}, \dots, C_{2n-1}^{2n}$ 的最大公因數是 2^{k+1} 。

問題七 $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$

過 D 作 BE 的平行線，交 AC 於 G 。

因為 $\frac{BD}{DC} = \lambda$ ，所以， $\frac{EG}{CG} = \lambda$ 。於是，

$$\frac{EG}{AE} = \frac{EG}{EC} \times \frac{EC}{AE} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times \lambda = \frac{\lambda^2}{1+\lambda}。$$

由此知 $\frac{ND}{AN} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda}$ ，而且 $\frac{a \triangle ABN}{a \triangle ABC} = \frac{a \triangle ABN}{a \triangle ABD} \times \frac{a \triangle ABD}{a \triangle ABC} = \frac{AN}{AD} \times \frac{BD}{BC}$

$$= \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2} \times \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$$

同理， $\frac{a \triangle BCL}{a \triangle ABC} = \frac{a \triangle ACM}{a \triangle ABC} = \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ 。於是，得

$$\frac{a \triangle LMN}{a \triangle ABC} = 1 - \frac{3\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}。依假設，知 1 - \frac{3\lambda}{1+\lambda+\lambda^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})。$$

