

教育部八十三學年度高級中學 數學競試決賽試題及參考解答

林來居

國立彰化師範大學數學系

本次競試共邀請多位教授命題，並邀請清華大學王懷權教授、林哲雄教授、臺灣師大陳昭地教授、高雄師大周武男教授、彰化師大林來居教授、中研院葉永南教授擔任試題分析與選題。茲將各競試時間及命題教授說明如下。

競試(一)：作答時間一小時五十分

第 1 題：清華大學沈昭亮教授提供。

第 2 題：臺灣師大陳昭地教授提供。

第 3 題：交通大學張鎮華教授提供。

競試(二)：作答時間一小時五十分

第 1 題：高雄師大周武男教授提供。

第 2 題：清華大學林哲雄教授提供。

第 3 題：清華大學沈昭亮教授提供。

獨立研究(一)：作答時間為四小時

第 1 題：高雄師大周武男教授提供。

第 2 題：臺灣師大陳昭地教授提供。

第 3 題：中研院葉永南教授提供。

第 4 題：彰化師大張淑珠教授提供。

獨立研究(二)：作答時間為一小時五十分

第 1 題：彰化師大蕭守仁教授提供。

第 2 題：交通大學張鎮華教授提供。

口 試：

第 1 題：臺灣師大陳昭地教授提供。

第 2 題：中研院葉永南教授提供。

此次競試承蒙數學界同仁參與命題、評審；以及教育部及彰化師大長官之指導及贊助，使這次比賽順利完成，特在此向他們致最高之敬意與謝意。

壹、競試(一)試題

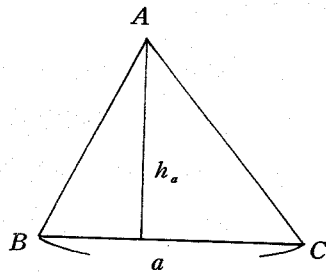
- 設 $p(x)$, $q(x)$ 是二個多項式, $p(x)$ 是一個 n 次多項式。若 $p(p(x)) = p(x)q(x)$, 且 $p(x) = 0$ 有 n 個相異的實數解。
 - 試證: $p(0) = 0$ 。
 - 試證: $p(x)$ 與 $q(x)$ 互質。
 - 設 $n = 3$, $p(x) = 0$ 的三個解為 $0, x_2, x_3$, 其中 $0 < x_2 < x_3$, 已知

$$p\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) > x_3, \text{ 試證 } q(x) = 0 \text{ 有六個相異的實數解。}$$

- 設 $V-ABCD$ 為以平行四邊形 $ABCD$ 為底面的四角錐。
已知 M, N 分別為 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 中點, P, O 及 R 分別在 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 三條直線上, 且 $\overrightarrow{VP} \perp \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{VO} \perp \overrightarrow{MN}$ 及 $\overrightarrow{VR} \perp \overrightarrow{BC}$, 試證:
 - P, O, R 三點共線。
 - $\triangle VMN$ 的面積小於 $\triangle VBC$ 與 $\triangle VDA$ 兩三角形面積和之半。
- 若整數 $n \geq 2$, 且 $0 \leq a_i \leq 4, i = 1, 2, \dots, n$, 求
 $(a_1 - a_2)^4 + (a_2 - a_3)^4 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^4 + (a_n - a_1)^4$ 最大值。

貳、競試(二)試題

- 設 a, b, c 分別為 $\triangle ABC$ 三邊, h_a, h_b, h_c 分別為 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 三高, 試證:
 $(b+c)h_a + (c+a)h_b + (a+b)h_c \geq 12S$,
 其中 S 代表 $\triangle ABC$ 之面積。
- 求最小的正整數 n , 使 $20n^2 + 9n + 1$ 為平方數。
- 令 L 表直線 $y = 2x$, F_1, F_2 分別表點 $(1, \frac{1}{2}), (2, 1)$, 設 E 是一個以 F_1 與 F_2 為焦點而與直線 L 相切之橢圓, 試問由原點到橢圓 E 上的任何點的距離最小者為何?



參、獨立研究(一)試題

- (a) 試證: 必有兩個正整數 x, y 使得對任意 $i, j \in \{0, 1, 2\}, \text{g.c.d.}(x+i, y+j) > 1$

成立。

- (b) 試證：對任何正整數 n ，必有正整數 x, y 使得對任意 $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ， $\text{g.c.d}(x+i, y+j) > 1$ 均成立。

2. 設 $x_1, x_2, \dots, x_{84}$ 都是介於 1 與 $\frac{5}{4}$ 之間的正數， p 表 $x_1, x_2, \dots, x_{84}$ 這 84 個數

的乘積， $p_j = \frac{p}{x_j}$ ，($j = 1, 2, \dots, 84$)，試證： $\sum_{j=1}^{84} p_j \sqrt{5-4x_j} \leq \sum_{j=1}^{84} x_j^{84}$

3. 某次區運籃球比賽共有 9 隊參加，參賽隊伍中每兩隊都恰好比賽一場，每場比賽勝者得 2 分負者得零分，沒有和局。已知各隊得分情形為 12, 12, 12, 10, 8, 6, 4, 4, 4，大會頒發參賽隊伍“特別獎”，任何參賽隊伍 A 得到特別獎的充要條件為：對於任何其它參賽隊伍 B ，則(1) A 隊勝 B 隊或(2) 存在參賽隊伍 C 使得 A 隊勝 C 隊而且 C 隊勝 B 隊。證明大會至少頒發 3 個特別報。
4. 若 n 是大於 3 的奇數， $\phi(n)$ 表所有小於 n 且與 n 互質的正整數個數，試證：
- (a) 若 n 含 k 個相異的質因數，則 $2^k \mid \phi(n)$ 。
- (b) 存在一個質數 p ，滿足 $p \nmid n$ ，但 $p \mid (2^{\phi(n)} - 1)$ 。

肆、獨立研究(二)試題

1. 一個正方形被分割成若干個矩形，證明這些矩形的外接圓的面積之和不小於原正方形的面積，並問此二者何時相等？
2. 在圓上有 $2n+1$ 相異點 ($n \geq 2$)，求具有下列性質的最小正整數 k^* ：將任意 k^* 點塗上黑色，一定存在兩個黑點，使得這兩點將圓分割成的兩條弧當中，有一弧內部恰含有這 $2n+1$ 點中的 n 點。

伍、□試試題

1. 當凸五邊形的每一條對角線都會跟它的某一邊平行時，稱為平行五邊形。
- (1) 試找出所有內接於一圓的平行五邊形。
- (2) 試找出一個不能內接於任意圓的平行五邊形。
2. 某次聚會中主人邀請 A, B, C, D, E, F, G 七個客人參加，這七個客人見面後陸續互相握手一次，主人的兒子分別數每一個客人握手的次數，握手還沒有握完前，主人進來了，他的兒子告訴他，這 A, B, C, D, E, F, G 七個人握手的次

數依序分別為 6 次，5 次，4 次，3 次，2 次，2 次及 1 次。這時候主人笑對他的兒子說，他們握手的次數你數的並不完全正確。

- (1) 請問主人為何能如此確定他的兒子數錯？
- (2) 若實際上每人握手的次數不少於主人兒子說的次數，而且至多只有一個客人握手的次數數錯了！如果客人 F 握手的次數是正確的，請問能否推論那些客人握手的次數是正確的？

壹、競試(一)試題參考解答

1. 設 $p(x) = 0$ 之根為 α_i ， $1 \leq i \leq n$ 且當 $i \neq j$ 時 $\alpha_i \neq \alpha_j$ ；

- (a) 已知 $p(p(x)) = p(x)q(x)$

我們得到 $p(0) = p(p(\alpha_1)) = p(\alpha_1)q(\alpha_1) = 0$

- (b) 由(a)知 $p(0) = 0$ ，故 $p(x)$ 無常數項

由已知， $p(x) = 0$ 無重根，故 $p'(\alpha_i) \neq 0$ ， $1 \leq i \leq n$ 。

$p(p(x)) = p(x)q(x)$ 兩邊微分得 $p'(p(x))p'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$

$$\Rightarrow p'(0)p'(\alpha_i) = p'(\alpha_i)q(\alpha_i), 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow q(\alpha_i) = p'(0) \neq 0$$

故 $p(x)$ 與 $q(x)$ 互質。

- (c) 令 $p(x) = ax(x-x_2)(x-x_3)$ ，其中 a 是負數。

$$\text{令 } p_2(x) = p(x) - x_2, p_3(x) = p(x) - x_3$$

因為 $p(\frac{x_2+x_3}{2}) > x_3$ ，故 $p_2(x) = 0$ 和 $p_3(x) = 0$ 也有三個相異實根，令其

分別為 a_1, a_2, a_3 和 b_1, b_2, b_3 ，則 $p(a_i) = x_2, p(b_i) = x_3, 1 \leq i \leq 3$

考慮 $Q(x) = p(p(x)) = p(x)q(x)$

則 $Q(x_i) = Q(a_i) = Q(b_i) = 0, 0 \leq i \leq 1$ ，即 $Q(x) = 0$ 有 9 個相異實根，又 $p(x)$ 與 $q(x)$ 互質，故 $q(x)$ 有六個相異實根。

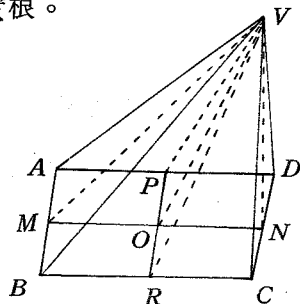
2. (a) $\therefore \vec{VP} \perp \vec{AD}, \vec{VO} \perp \vec{MN}, \vec{VR} \perp \vec{BC}$

$$\therefore \vec{VP} \cdot \vec{AD} = 0, \vec{VO} \cdot \vec{MN} = 0,$$

$$\vec{VR} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\vec{PO} = \vec{VO} - \vec{VP}$$

$$\vec{PO} \cdot \vec{MN} = \vec{VO} \cdot \vec{MN} - \vec{VP} \cdot \vec{MN}$$



$\therefore M, N$ 為 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 中點, $\overline{AD} = \overline{MN} = \overline{BC}$

上式 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{VO} \cdot \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{VP} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$$\overrightarrow{PO} \perp \overrightarrow{MN}$$

同理可證 $\overrightarrow{OR} \perp \overrightarrow{MN}$

故 P, O, R 三點共線。

$$(b) \triangle VMN = (\overline{MN} \times \overline{VO}) \times \frac{1}{2}$$

$$\triangle VAD = (\overline{AD} \times \overline{VP}) \times \frac{1}{2}$$

$$\triangle VBC = (\overline{BC} \times \overline{VR}) \times \frac{1}{2}$$

又 P, O, R 三點共線, $\overline{PR} \perp \overline{MN}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \overline{PO} = \overline{OR}$ 即在 $\triangle VPR$ 中, $\overline{VO}$ 為中線

$$\overline{VP} + \overline{VR} > 2 \overline{VO}$$

$$\frac{1}{2} \overline{VO} \cdot \overline{MN} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overline{VR} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{VP} \cdot \overline{AD} \right)$$

$$\triangle VMN < \frac{1}{2} (\triangle VBC + \triangle VAD)$$

3. 因為每對 a_i 和 a_j 恆有 $(a_i - a_j)^4 \leq 4^4$, 所以 $A \leq 4^4 n$

當 n 為偶數時, 取 $a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$ 和 $a_2 = a_4 = \dots = a_n = 4$, 共所對應的 $A = 4^4 n$, 所以最大值在 n 偶數時是 $4^4 n$ 。

當 n 為奇數時, 取 $a_1 = a_3 = \dots = a_{n-2} = a_n = 0$ 和 $a_2 = a_4 = \dots = a_{n-1} = 4$, 其所對應的 $A = 4^4 (n-1)$

對任一種可能的和

$$\begin{aligned} A &= (a_1 - a_2)^4 + (a_2 - a_3)^4 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^4 + (a_n - a_1)^4 \\ &= x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{n-1}^4 + x_n^4 \end{aligned}$$

其中 $x_1 = a_1 - a_2, x_2 = a_2 - a_3, \dots, x_{n-1} = a_{n-1} - a_n, x_n = a_n - a_1$

因為 n 是奇數, 必存在相鄰的 x_i 和 x_{i+1} 同號 (x_n 與 x_1 視為相鄰)

$$\text{結果 } x_i^4 + x_{i+1}^4 \leq a^4 + b^4 \leq (a+b)^4 \leq 4^4$$

其中 $a = |x_i|, b = |x_{i+1}|, a+b = |a_i - a_{i+2}| \leq 4$

故 $A \leq 4^4 (n-1)$ 結果當 n 是奇數時, 其最大值是 $4^4 (n-1)$ 。

貳、競試(二)試題參考解答

1. 因 $a \times h_a = b \times h_b = c \times h_c = 2S$

原式可改為 $(a+b+c)h_a + (a+b+c)h_b + (a+b+c)h_c \geq 18S$

即要證 $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \geq 18S$

但 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $h_a+h_b+h_c \geq 3\sqrt[3]{h_a h_b h_c}$

相乘得 $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \geq 9\sqrt[3]{(ah_a)(bh_b)(ch_c)} = 18S$

2. 因 $20n^2+9n+1 = (4n+1)(5n+1)$ 為平方數，而且 $4n+1$ 與 $5n+1$ 互質，得 $4n+1$ 與 $5n+1$ 皆是平方數。

令 $4n+1 = a^2$, $5n+1 = b^2$ ，其中 a, b 皆為大於 1 的正整數

因 $a^2 = 4n+1$ 為奇數，故 a 必為奇數，表 $a = 2c+1$ ，其中 c 為正整數

因此 $4n+1 = a^2 = (2c+1)^2$ 化簡得 $n = c(c+1)$

從而得 $b^2 = 5n+1 = 5c(c+1)+1$ ，故知 b 為奇數，表 $b = 2d+1$ ，其中 d 為正整數，則得 $(2d+1)^2 = 5c(c+1)+1$

化簡得 $4d(d+1) = 5c(c+1)$

因此 $5 \mid d$ 或 $5 \mid (d+1)$

當 $5 \mid d$ 時，令 $d = 5e$ ，得 $c(c+1) = 4e(5e+1)$

當 $5 \mid (d+1)$ 時，令 $d+1 = 5f$ ，得 $c(c+1) = 4f(5f-1)$

因為 $c(c+1)$ 為兩個連續正整數之積，在第二情況中取 $f = 2$ ，則得

$$c(c+1) = 8 \times 9$$

解得 $c = 8$, $d = 9$ 此為滿足 $4d(d+1) = 5c(c+1)$ 的最小正整數，因此 $n = c(c+1) = 72$ ，最後驗算

$20n^2+9n+1 = (4n+1)(5n+1) = 289 \times 361 = 17^2 \times 19^2 = (323)^2$ 為一個平方數，因此 $n = 72$ 為所求。

3. F_1 與 F_2 在 $y = \frac{1}{2}x$ 上，令 p_1, p_2 表 E 在 $\overleftrightarrow{F_1 F_2}$ 上的頂點

若知 $O - P_1 - F_1$ ，則 $\overline{OP_1}$ 即為所求。

令 $\overleftrightarrow{F_1 F_1}$ 垂直 L 於 k ，且 $\overline{F_1 K} = \overline{KF_1}$ ，連 $\overleftrightarrow{F_1 F_2}$ 交 L 於 T ，則 T 為 L 對 E 的切點，且由橢圓的性質得知 $\overline{P_1 F_1} + \overline{P_1 F_2} = \overline{F_1 T} + \overline{F_2 T} = \overline{F_1 F_2}$

$$\overrightarrow{F_1'F_1} \text{ 的方程式爲 } y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\text{因爲 } \overline{F_1K} = \frac{3}{2\sqrt{5}}, \text{ 由上面方程式可設 } F_1' = (x, -\frac{1}{2}x+1)$$

$$\text{因 } \overline{F_1K} = \overline{F_1'K}, \text{ 得 } \frac{|2x - (-\frac{1}{2}x+1)|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{結果 } F_1' = (-\frac{1}{5}, \frac{11}{10})$$

$$\text{因此 } \overline{F_1T} + \overline{F_2T} = \overline{F_1'T_2}$$

$$= \sqrt{(-\frac{1}{5}-2)^2 + (\frac{11}{10}-1)^2} = \frac{\sqrt{485}}{10} = \overline{P_1F_1} + \overline{P_1F_2}$$

$$\text{而 } \overline{OF_1} + \overline{OF_2} = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{485}}{10}$$

$$\text{因此 } O - P_1 - F_1 - F_2$$

$$\text{令所欲求之最短距離是 } d, \text{ 則 } d = \overline{OP_1}$$

$$\text{結果 } \overline{OF_1} + \overline{OF_2} = (d + \overline{P_1F_1}) + (d + \overline{P_1F_2}) = 2d + \overline{P_1F_1} + \overline{P_1F_2}$$

$$\text{即 } \frac{3\sqrt{5}}{2} = 2d + \frac{\sqrt{485}}{10}$$

$$\text{結果 } d = \frac{15\sqrt{5} - \sqrt{485}}{20}$$

參、獨立研究(一)試題參考解答

1. 設 $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$ 爲 n^2 個相異質數

$$\text{考慮 } \begin{cases} x \equiv 0 & \text{mod } p_{11} \times p_{12} \times \dots \times p_{1n} \\ x \equiv -1 & \text{mod } p_{21} \times p_{22} \times \dots \times p_{2n} \\ \vdots \\ x \equiv -n & \text{mod } p_{n1} \times p_{n2} \times \dots \times p_{nn} \end{cases}$$

由中國餘數定理，必有一共同解 c 。

另外考慮

$$\begin{cases} y \equiv 0 & \text{mod } p_{11} \times p_{21} \times \cdots \times p_{n1} \\ y \equiv -1 & \text{mod } p_{12} \times p_{22} \times \cdots \times p_{n2} \\ \vdots \\ y \equiv -n & \text{mod } p_{1n} \times p_{2n} \times \cdots \times p_{nn} \end{cases}$$

由相同定理，必有一共同解 d

則 $\gcd(c+i, d+j) > 1$ 對於所有 $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ 。

2. 若 $t \in [1, \frac{5}{4}]$ ，則 $\sqrt{5-4t} \leq t$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{84}) = \sum_{j=1}^{84} p_j \times \sqrt{5-4x_j} \leq \sum_{j=1}^{84} p_j x_j = 84p$$

$$\text{而且 } \frac{x_1^{84} + \cdots + x_{84}^{84}}{84} \geq x_1 \times \cdots \times x_{84} = p$$

$$\text{結果 } x_1^{84} + \cdots + x_{84}^{84} \geq 84p \geq \sum_{j=1}^{84} p_j \times \sqrt{5-4x_j}$$

3. 解法：若 A 隊得分大於 B 隊

令 M 為被 A 擊敗的隊伍所成的集合

N 為被 B 擊敗的隊伍所成的集合

如果 B 勝 A 則 $A \in N$ 但是 $A \notin M$ ，但 A 隊得分大於 B 隊，故 $|M| > |N|$

$$M - N = \phi$$

故存在 C 隊使得 $C \in M - N$

即存在 C 隊，使得甲隊勝 C 隊，而 C 隊勝 B 隊。因此， A 得特別獎。

由已知有三隊得分最高，故大會至少頒發三個特別獎。

4. (a) 若 $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ ，其中 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 是互異的質數，且所有 p_i 異於 2。

$$\text{結果 } \phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i - 1} (p_i - 1)$$

因為所有 p_i 異於 2，故 $2^k \mid \phi(n)$ 。

(b) 令 $\phi(n) = \ell \times 2^k$ 且 $2^{\phi(n)} - 1 = y^{2^k} - 1$ ，則 $y = 2^\ell$

結果 y 是偶數且 $y > 3$ (因為某個 $p_i - 1 > 2$)

$$\text{又 } y^{2^k} - 1 = (y^{2^{k-1}} + 1)(y^{2^{k-2}} + 1) \cdots (y^2 + 1)(y + 1)(y - 1),$$

這些因數兩兩互質，且每一項至少含一個質因數。

所以 $2^{\phi(n)} - 1$ 至少有 $(k+1)$ 個質因數，而 n 只有 k 個質因數

即存在質數 p 使得 $p \mid 2^{\phi(n)} - 1$ 但 $p \nmid n$ 。

肆、獨立研究(二)試題參考解答

1. 若矩形長寬為 a, b ，則其外接圓面積是 $\frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$

但 $\frac{\pi}{4}(a^2 + b^2) \geq \frac{\pi}{2}(\sqrt{ab})^2$ 且等號相等的充要條件是 $a = b$

故等號相等的充要條件是矩形為正方形。

若某正方形被分割成若干矩形，而其面積分別為 $R_1, \dots, R_n$ ，且其外接圓面積分別為 $S_1, \dots, S_n$

$$\text{則 } S_1 + \dots + S_n \geq \frac{\pi}{2}(R_1 + \dots + R_n) = \frac{\pi}{2}(\text{原正方形面積})$$

= 原正方形外接圓面積

結果等號成立的充要條件是正方形被分割成若干正方形。

2. 設 $(2n+1)$ 點，從某一點開始，依順時針方向，編號為 $0, 1, 2, \dots, 2n$

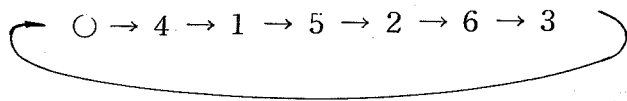
令 $S = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$

則本題相當於求最小正整數 K^* ，使得若 $A \subseteq S$ 且 $|A| = K^*$ ，則存在 $i, j \in A$ 使得 $i - j \equiv (n+1) \pmod{(2n+1)}$ ，也可以求最大正整數 p^* ，使得若 $A \subseteq S$ 且 $|A| = p^*$ ，則對所有 $i, j \in A$ ， $i - j \not\equiv n+1 \pmod{(2n+1)}$ 恆對。請注意 $K^* = p^* + 1$

當 $i - j \equiv (n+1) \pmod{(2n+1)}$ 或 $j - i \equiv (n+1) \pmod{(2n+1)}$ ，則稱 i 和 j 「相關」。

因為 $n \geq 2$ ，每一數最多和兩異於 i 的數相關，就是 $i \pm (n+1) \pmod{(2n+1)}$

又因為 $\gcd(2n+1, n+1) = \gcd(-1, n+1) = 1$ ，所以若將「相關」這關係用圖表示，將形成一長度為 $(2n+1)$ 的迴圈，例如 $n = 3$ 時



結果長度為 $(2n+1)$ 的迴圈，最多可取 n 點兩兩不相關

所以 $p^* = n$ ， $K^* = n+1$

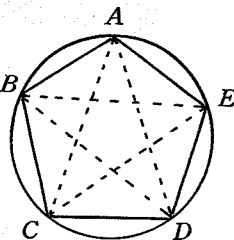
伍、口試試題參考解答

1. (1) 如右圖

已知 A, B, C, D, E 五點共圓且 $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$

故知 $ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC$ 都是等腰梯形。於是 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = \overline{AB}$

進而 $\angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB = \angle ABC$ 即得知 $ABCDE$ 為正五邊形。反之，任一正五邊形都是內接於一圓之平行五邊形。

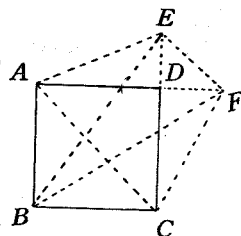


(2) 如右圖

設 $ABCD$ 是邊長為 1 的正方形，延長 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ ，分別取 F, E 使得 $\overline{DF} = \overline{DE} = \ell > 0$ ，結果 $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AF}$, $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ 選取適當的長 ℓ 使得 $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$ ($\Leftrightarrow \overline{BF} \parallel \overline{AE}$)，即 $\overline{CF}$ 的斜率等於 $\overline{BE}$ 的斜率

$$\text{此時 } \frac{1}{\ell} = \frac{1+\ell}{1} \quad \text{即} \quad \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

結果 $ABCFE$ 為一平行五邊形，但不能內接於任一圓。



2. (1) $6+5+4+3+2+2+1=23$ 為奇數，故不可能。

(2) 若 G 是正確，則因 $A \geq 6$ ，故 $A = 6$ ，結果 A 必正確。因此 A 與每人皆握手結果 B 和 G 以外的人握手，但是 F 是正確，所以 C 和 A, B, D, E 握手，故 C 正確。因此 E 已經 3 次了，所以 E 錯， D 正確。若 G 是錯，則 A, B, C, D, E, F 皆正確。結果 A, B, C, D, F 必正確。

★