2024 TRML 思考賽試題探究與回饋

朱亮儒

國立臺灣師範大學數學系退休教授

壹、前 言

台灣區高中數學競賽(TRML)是全球規模最大的數學團隊競賽活動，它是一個針對國內高中在學學生所設計的競賽，每年約有 240 隊近 4000 人參賽。TRML 起源於 1975 年的美國高中數學聯盟(ARML)所主辦的全美高中數學競賽模式，該競賽由財團法人九九文教基金會主辦，固定在每年八月的第三週(星期六與星期日)兩天分台北、台中、高雄三考區同時舉行。參賽隊伍每隊由 15 人自由組隊報名，競賽共分成團體賽 (Team Round)、思考賽 (Power Question)、個人賽(Individual Question)與接力賽 (Relay Round)四個項目；其中「團體賽」與「思考賽」得由 15 位隊員分工合作在固定的時間內，互相討論、發揮潛力、充分利用每位隊員的專長，為團隊爭取榮譽。思考賽試題是競賽項目中最具挑戰性的項目，共 10 道計算證明題，可評測學生的閱讀、歸納、推理及論證的能力；全隊 15 人分工作答60 分鐘，再討論出一份最終的答案卷。歷年來此競賽已普遍獲得大家的認同，同時培育出許多台灣參加國際數學奧林匹亞(IMO)的國手，也確實帶動了國內學習數學的風氣，進而開發學生數學潛能發展，達到推廣中學生數學教育的目的。2024 年 TRML 已進入第 26 屆，歷年來參與競賽的老師及同學已超過十萬人次，目前任職各大學的教授與高中老師有很多曾是 TRML 的參賽隊員，希望本文的探討能使團隊合作解決問題的方式在未來數學的教學上能建立另一種學習的模式。有志參加數學競賽或檢定的中學生，可參訪相關的網頁[1,2,3]。

本作品的核心目標包含以下兩個研究主軸：

(1) 針對今年思考賽試題(參見附錄)，提出完整的理論基礎與解析。

(2) 探索加深加廣的延伸問題。

貳、思考賽試題的理論基礎與解析

設正整數 $n \geq 2$。對 $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的每一子集 S，我們稱 S 中所含連續整數數對 $(i, i+1)$ 的組數為 S 的**權數**，並以 $f_n(S)$ 表示其權數(**註**：符號 $f_n(S)$ 即為原思考賽試題中

的 $c(S)$)。同時，我們規定空集合 $\varnothing$ 的權數 $f_n(\varnothing)=0$ 。以 $n=9$ 為例，子集 $S=\{1,2,3,4,6,7,9\}$ 中的連續整數數對共有 4 組： $(1,2),(2,3),(3,4),(6,7)$ ，此時，集合 S 的權數 $f_9(S)=4$。再以 $n=4$ 為例，集合 $X_4=\{1,2,3,4\}$ 中滿足權數 $f_4(S)=0$ 的子集 S 中不能有連續的整數數對，此種集合 S 共有以下 8 種：

$$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}\text{。}$$

而集合 $X_4=\{1,2,3,4\}$ 中滿足權數 $f_4(S)=1$ 的子集 S 恰有 1 組連續的整數數對，此種集合 S 共有以下 5 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\text{。}$$

另一方面，滿足權數 $f_4(S)=2$ 的子集 S 恰有 2 組連續的整數數對，此種集合 S 共有 2 種： $\{1,2,3\},\{2,3,4\}$ 。

本屆試題有兩個主要的評量目標：其一是求出 X_n 中有多少種的子集 S 滿足權數 $f_n(S)=k$ ；另一則是計算 X_n 中恰有 k 個元素的所有子集 S 之 $f_n(S)$ 值的總和。

定理 1：對正整數 n ，滿足權數 $f_n(S)=0$ 的子集 S 有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\text{ 種。}$$

證：對正整數 n ，令 a_n 表示 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中，滿足權數 $f_n(S)=0$ 的子集 S 之個數。顯然， $a_1=2,a_2=3$。對 $n\geq 3$，滿足 $f_n(S)=0$ 的子集 S 可分成 2 類：

第 1 類： $1\in S$ ，此時， $2\notin S$。故此種子集 S 相當於在 $\{3,4,5,\ldots,n\}$ 中，找滿足 $f_{n-2}(S)=0$ 的子集 S ，其個數有 a_{n-2} 種。

第 2 類：$1\notin S$，此種子集 S 相當於在 $\{2,3,4,\ldots,n\}$ 中，找滿足 $f_{n-1}(S)=0$ 的子集 S，其個數有 a_{n-1} 種。

因此， a_n 滿足二階遞迴式： $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ (費氏數列)，其中 $n\geq 3$。再由初始值 $a_1=2,a_2=3$ ，我們可逐項遞推得到 a_n 的值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

事實上，對於齊次遞迴式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 的一般解[4,5,6,7]，我們利用其特徵方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩根 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，可設數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般式為

$$a_n = p(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + q(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \text{。}$$

再由初始值的條件 $a_1 = 2, a_2 = 3$，可求得 $p = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, q = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$；因此，

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \text{，}$$

上式亦可改寫成 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}$ （Binet 公式）。

定理 2：對正整數 $n \geq 2$，滿足權數 $f_n(S) = 1$ 的子集 S 有 $\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)C_{n-k-2}^k$ 種。

(**註**：當 $n < m$ 時，我們規定 $C_m^n = 0$)

證：首先，將 X_n 的每一子集 S 對應一個 n 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$，其中

$$a_k = \begin{cases} 1, \text{當 } k \in S \\ 0, \text{當 } k \notin S \end{cases} \text{，} k = 1, 2, 3, \cdots, n \text{。}$$

若 $|S| = n-k$，則 S 對應的二元數列中恰有 $n-k$ 個 1 及 k 個 0。當 $f_n(S) = 1$ 時，$0 \leq k \leq n-2$，我們可以在 k 個 0 隔開的 $k+1$ 個空隙中插入 $n-k$ 個 1，其中恰有 2 個 1 併在同一個空隙，其餘 $n-k-2$ 個 1 各自插入其他 k 個空隙中，計有 $C_1^{k+1} \cdot C_{n-k-2}^k$ 種插入的方法數。因此，所求的子集個數為

$$\sum_{k=0}^{n-2} C_1^{k+1} \cdot C_{n-k-2}^{k} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) C_{n-k-2}^{k}$$ 。（亦可寫成 $\sum_{k=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil -1}^{n-2} (k+1) C_{n-k-2}^{k}$）

採取類似的證明方法，我們可以推導出權數為 m 的子集 S 個數的一般公式，如下所示：

定理 3：若 m 為非負的整數，且 $m \le n$，則集合 $X_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ 中，滿足權數

$f_n(S) = m$ 的非空子集 S 有 $\sum_{k=\left\lceil \frac{n-m+1}{2} \right\rceil}^{n-1} C_m^{n-k} C_{n-k-m+1}^{k}$ 種。

證：將 X_n 的每一個非空子集 S 對應一個 n 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 。

若 $|S| = n-k$，則 S 對應的二元數列中恰有 $n-k$ 個 1 及 k 個 0。當 $f_n(S) = m$ 時，我們可以在 k 個 0 隔開的 $k+1$ 個空隙中選出 $n-k-m$ 個空隙，將 $n-k$ 個 1 插入這些空隙，每個空隙至少要有一個 1；其方法數相當於 $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-k-m} = n-k$ 的正整數解之個數，此有 C_m^{n-k-1} 種方法。因此，滿足 $f_n(S) = m$ 的非空子集 S 共有

$\sum_{k=0}^{n-2} C_m^{n-k-1} C_{n-k-m}^{k+1} = \sum_{k=\left\lceil \frac{n-m-1}{2} \right\rceil}^{n-m-1} C_m^{n-k-1} C_{n-k-m}^{k+1}$ 種，此公式也可以寫成 $\sum_{k=\left\lceil \frac{n-m+1}{2} \right\rceil}^{n-m} C_m^{n-k} C_{n-k-m+1}^{k}$ 。

特例：當 $m = 0$ 時，滿足 $f_n(S) = 0$ 的子集 S 有 $1 + \sum_{k=\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}^{n} C_{n-k+1}^{k}$ 種（S 可以是空集合）；

當 $m = 1$ 時，滿足 $f_n(S) = 1$ 的子集 S 有 $\sum_{k=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}^{n-1} (n-k) C_{n-k}^{k}$ 種；

當 $m = 2$ 時，滿足 $f_n(S) = 2$ 的子集 S 有 $\sum_{k=\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}^{n-2} C_2^{n-k} C_{n-k-1}^{k}$ 種。

註：**定理** 1 的數列 a_n 與**定理** 3 的 $b_n=1+\sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{n}C_{n-k+1}^{k}$ 都代表滿足 $f_n(S)=0$ 的子集 S 之個數，雖然型式不同，但兩者有相同的初始值 $a_1=b_1=2, a_2=b_2=3$，以及與費氏數列相同的二階遞迴關係，由此可推得組合恆等式 $a_n=b_n$。詳細的證明可參考[4]的定理 7.1.2。

定理 4： 對 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 的所有子集 S，其權數 $f_n(S)$ 的總和為

$$\sum_{S\subset X_n} f_n(S)=(n-1)2^{n-2}$$，其中 $n\geq 2$。

證：對正整數 $n\geq 2$，在計算 $\sum_{S\subset X_n} f_n(S)$ 時，可先對每一組數對 $(i,i+1)$，計算含此數對的子集個數。除了 $i,i+1$ 之外，其他的 $n-2$ 個數都可在子集 S 中或不在 S 中，故含數對 $(i,i+1)$ 的集合 S 恰有 2^{n-2} 個。又整數數對 $(i,i+1)$ 有以下 $n-1$ 種可能的情況：$(1,2),(2,3),(3,4),\ldots,(n-1,n)$，因此，所求權數的總和

$$\sum_{S\subset X_n} f_n(S)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{(i,i+1)\in S} f_n(S)=\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-2}=(n-1)2^{n-2}$$。

定理 5： 對 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中恰含 k 個元素的所有子集 S，其權數 $f_n(S)$ 的總和為 $\sum_{|S|=k} f_n(S)=(n-1)C_{k-2}^{n-2}$，其中 $n\geq k\geq 2$。

證：令 $|S|=k$。若 S 包含某一數對 $(i,i+1)$，其中 $i=1,2,3,\ldots,n-1$，因為 S 中除了 $i,i+1$ 這二數外，還要從其餘的 $n-2$ 個數選取 $k-2$ 個數，故此種 S 恰有 C_{k-2}^{n-2} 種。

註：在計算權數 $f_n(S)$ 時，數對 $(i,i+1)$ 會被算了一次權數，如果 S 中還有其他的連續數對，其權數也會加權計在 $f_n(S)$ 中。例如：$S=\{1,2,4,6,7,9\}$，在考慮數對 $(1,2)$ 時，算了一次權數，而在考慮數對 $(6,7)$ 時，也一樣算了一次權數，故 $f_n(S)=2$。

又 i 可以是 $1,2,3,\ldots,n-1$ 中的任一數，故所求權數 $f_n(S)$ 的總和為

$$\sum_{|S|=k} f_n(S)=\sum_{i=1}^{n-1} C_{k-2}^{n-2}=(n-1)C_{k-2}^{n-2}\text{ 。}$$

事實上，對 $i=1,2,3,\ldots,n-1$，我們可以定義函數 $P_i(S)=\begin{cases}1, & \text{若 } i,i+1\in S\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，則由加法原理可知： $f_n(S)=\sum_{i=1}^{n-1} P_i(S)$，且對每一個 $i=1,2,3,\ldots,n-1$，因為 S 中除了 $i,i+1$ 這二數外，還要從其餘的 $n-2$ 個數選取 $k-2$ 個數，故 $\sum_{|S|=k} P_i(S)=C_{k-2}^{n-2}$。因此，

$$\sum_{|S|=k} f_n(S)=\sum_{|S|=k}\sum_{i=1}^{n-1} P_i(S)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{|S|=k} P_i(S)=\sum_{i=1}^{n-1} C_{k-2}^{n-2}=(n-1)C_{k-2}^{n-2}\text{ 。}$$

推論：對 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中至少有 4 個元素的所有子集 S，其權數 $f_n(S)$ 的總和為 $\sum_{|S|\geq 4} f_n(S)=(n-1)(2^{n-2}-n+1)$。

證：由定理 5，可得

$$\sum_{|S|\geq 4} f_n(S)=\sum_{k=4}^{n}(n-1)C_{k-2}^{n-2}=(n-1)(C_2^{n-2}+C_3^{n-2}+\cdots+C_{n-2}^{n-2})=(n-1)(2^{n-2}-n+1)\text{ 。}$$

註：**定理** 4 的一般式也可直接由**定理** 5 的結果推導如下：

$$\sum_{S\subset X_n} f_n(S)=\sum_{k=2}^{n}\sum_{|S|=k} f_n(S)=\sum_{k=2}^{n}(n-1)C_{k-2}^{n-2}=(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} C_k^{n-2}=(n-1)2^{n-2}\text{ 。}$$

進一步地，對 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中恰含 k 個元素的子集 S，令 $t_n(S)$ 表示 S 中 m 個連續整數組 $(i,i+1,i+2,\ldots,i+m-1)$ 的組數，其中 $n\geq k\geq m\geq 2$；我們可以得到類似的結果如下：

定理 6： 對 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中恰含 k 個元素的所有子集 S ，其 $t_n(S)$ 的總和為

$$\sum_{|S|=k} t_n(S)=(n-m+1)C_{k-m}^{n-m}$$，其中 $n\geq k\geq m\geq 2$ 。

證：對 $i=1,2,3,\ldots,n-m+1$，及子集 S ，定義 $P_i(S)=\begin{cases}1, & 若\ i,i+1,\cdots,i+m-1\in S\\ 0, & 其他\end{cases}$ 。

則可推得： $t_n(S)=\sum_{i=1}^{n-m+1}P_i(S)$，且對每一個 $i=1,2,3,\ldots,n-m+1$， $\sum_{|S|=k}P_i(S)=C_{k-m}^{n-m}$，

這是因為 S 中除了 $i,i+1,\ldots,i+m-1$ 這 m 個數外，還要從其餘的 $n-m$ 個數選取 $k-m$ 個數。因此，

$$\sum_{|S|=k}t_n(S)=\sum_{|S|=k}\sum_{i=1}^{n-m+1}P_i(S)=\sum_{i=1}^{n-m+1}\sum_{|S|=k}P_i(S)=\sum_{i=1}^{n-m+1}C_{k-m}^{n-m}=(n-m+1)C_{k-m}^{n-m}$$ 。

參、探索思考賽加深加廣問題與回饋

前面談的是集合的權數(weight)問題，當集合中的元素前後都沒有連接的數時，我們稱該元素為**孤立元**(isolate element)。例如：集合 $\{1,3,4,6,8,9\}$ 中恰有 2 個元素為孤立元，即 1 與 6。顯然，集合的權數為 0 之充要條件為該集合的每一元素都是孤立元。為了後續的探討，對 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$，我們令 $g_n(S)$ 表示 X_n 的子集 S 中孤立元的個數。例如：當 $n=5$ 時，含有孤立元的子集 S 可分類如下：

(i) 恰含 1 個元素且為孤立元的子集有 5 個：$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$，每個 $g_5(S)=1$。

(ii) 恰含 2 個元素且有孤立元的子集有 6 個：$\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\}$，每個 $g_5(S)=2$ 。

(iii) 恰含 3 個元素且有孤立元的子集有 7 個：

$\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\}$ 。

其中。子集 $S=\{1,3,5\}$ 的孤立元個數 $g_5(S)=3$，其他 6 個 $g_5(S)=1$ 。

(iv) 恰含 4 個元素且有孤立元的子集有 2 個：$\{1,2,3,5\},\{1,3,4,5\}$，每個 $g_5(S)=1$ 。

(v) 恰含 5 個元素且有孤立元的子集有 0 個。

由上面資料，可得：所有子集 S 的孤立元個數 $g_5(S)$ 之總和為

$$\sum_{S\subset X_n} g_5(S)=(1\times 5)+(2\times 6)+(1\times 6+3\times 1)+(1\times 2)+0=28$$。

以下，我們提出類似**定理** 1、**定理** 4 及**定理** 5 的一般性結果：

定理 7：若 a_n 表示 $X_n=\{1,2,3,\ \ldots,n\}$ 中不含孤立元的子集 S 之個數，則數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴式 $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$，其中 $n\ge 4$。

證：顯然，$a_1=1,a_2=2,a_3=4$。對 $n\ge 3$，$k=1,2,3,\ldots,n-1$，令 b_k 為包含集合 $\{1,2,3,\ldots,k\}$ 且不含孤立元的子集 S 之個數。計算 a_n 時，可將 $g_n(S)=0$ 的子集 S 分成 3 類分別計算：

(i) $S=\varnothing$，這樣的子集 S 恰有1種。

(ii) 若 $1\in S$，由於1不是孤立元，可知 $2\in S$；這樣的子集 S 恰有 b_2 種。更進一步，當 $3\in S$ 時，滿足 $g_n(S)=0$ 的子集 S 有 b_3 種；而當 $3\notin S$ 時，滿足 $g_n(S)=0$ 的子集 S 有 a_{n-3} 種；因此，$b_2=b_3+a_{n-3}$。同理，

$$b_3=b_4+a_{n-4}\,,\,b_4=b_5+a_{n-5}\,,\cdots,\,b_{n-2}=b_{n-1}+a_1$$。

又 $b_{n-1}=2$，合併以上各式，可得 $b_2=\sum_{k=1}^{n-3}a_k+2$。

(iii) 若 $S\neq\varnothing$ 且 $1\notin S$，則找這樣的子集 S 相當於在 $\{2,3,4,\ldots,n\}$ 中計算沒有孤立元的非空子集 S 之個數，此種子集有 $a_{n-1}-1$ 種。因此，由加法原理可得

$$a_n=1+b_2+(a_{n-1}-1)=\sum_{k=1}^{n-1}a_k-a_{n-2}+2$$。

將 n 以 $n-1$ 代換可得 $a_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-2}a_k-a_{n-3}+2$；合併以上兩式，可知：

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$$，

即 $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$，其中 $n\ge 4$。

定理 8：對 $X_n=\{1,2,3,\ \ldots,n\}$ 的所有子集 S，其孤立數 $g_n(S)$ 的總和為

$$\sum_{S\subset X_n} g_n(S)=(n+2)2^{n-3}$$，其中 $n\geq 3$。

證：對 $n\geq 3$，在計算 $\sum_{S\subset X_n} g_n(S)$ 時，可分成 3 類分別計算：

(i) 若 1 是 S 的孤立元，則 $2\notin S$，其他 $3,4,5,\ldots,n$ 這 $n-2$ 個數都可在 S 中或不在 S 中，故這樣的子集 S 有 2^{n-2} 種。

(ii) 若 n 是 S 的孤立元，則 $n-1\notin S$，其他 $1,2,3,\ldots,n-2$ 這 $n-2$ 個數都可在 S 中或不在 S 中，故這樣的子集 S 也有 2^{n-2} 種。

(iii) 若 i 是 S 的孤立元，其中 $i\in\{2,3,4,\ldots,n-1\}$，則 $i-1,i+1\notin S$，其他的 $n-3$ 個數都可在 S 中或不在 S 中，故對每一個 i，這樣的子集 S 有 2^{n-3} 種。又 i 可為 $2,3,4,\ldots,n-1$ 中任一數，故這類的子集 S 共有 $(n-2)\cdot 2^{n-3}$ 種。

註：上述的分類雖不互斥，1 與 n 可同時是 S 的孤立元，例如：$S=\{1,3,4,\ldots,n-2,n\}$，在分類(i)與(ii)各算了 1 次孤立數，但這也符合在計算 $\sum_{S\subset X_n} g_n(S)$ 的總和時，必須加權計算。

因此，所求孤立數 $g_n(S)$ 的總和為

$$\sum_{S\subset X_n} g_n(S)=2^{n-2}+2^{n-2}+(n-2)2^{n-3}=(n+2)2^{n-3}$$。

定理 9：對集合 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 中恰含 k 個元素的所有子集 S，其孤立數 $g_n(S)$ 的總和為 $\sum_{|S|=k} g_n(S)=(n-k+1)C_{k-1}^{n-2}$，其中 $n>k\geq 1$。

證：令 $|S|=k$。對 $i=1,2,3,\ldots,n$，我們定義函數 $P_i(S)=\begin{cases}1, & 若\ i\ 是\ S\ 的孤立元\\ 0, & 其他\end{cases}$，

則由加法原理可得：$g_n(S)=\sum_{i=1}^{n} P_i(S)$。因此，所求

$$\sum_{|S|=k} g_n(S) = \sum_{|S|=k}\sum_{i=1}^{n} P_i(S) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{|S|=k} P_i(S) = \sum_{|S|=k} P_1(S) + \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{|S|=k} P_i(S) + \sum_{|S|=k} P_n(S)$$

$$= C_{k-1}^{n-2} + \sum_{i=2}^{n-1} C_{k-1}^{n-3} + C_{k-1}^{n-2} = 2C_{k-1}^{n-2} + (n-2)C_{k-1}^{n-3} = (n-k+1)C_{k-1}^{n-2} \text{ 。}$$

註：**定理** 8 的一般式也可直接由**定理** 9 的結果推導如下：

$$\sum_{S\subset X_n} g_n(S) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{|S|=k} g_n(S) = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)C_{k-1}^{n-2} = n\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^{n-2} - \sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{k-1}^{n-2}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}^{n-2} - \sum_{k=2}^{n-1}(n-2)C_{k-2}^{n-3} = n\cdot 2^{n-2} - (n-2)2^{n-3} = (n+2)2^{n-3} \text{ 。}$$

肆、結 語

2024 TRML 思考賽試題原自於大家所熟悉的組合題型：「 9 個人由左而右排成一列，從中任選 3 人，試問被選到的人都不相鄰的選法有多少種？」其延伸出來的問題是：「 n 個人由左而右排成一列，從中任選幾人($0,1,2,\ldots,n$ 人均可)，試問被選到的人都不相鄰的選法有多少種？」此問題相當於「求滿足 $f_n(S)=0$ 的子集 S 有多少種？(見**定理** 1)」。又可加深加廣到其相關問題，如：

(1) 任選幾人，試問被選到的人中恰有 m 組兩人相鄰的選法有多少種？此問題相當於「求滿足權數 $f_n(S)=m$ 的子集 S 有多少種？(見**定理** 3)」

(2) 任選幾人，計算每一種被選到的人中相鄰兩人的組數，試問全部組數的總和是多少？此問題相當於「求全部子集 S 的權數總和 $\sum_{S\subset X_n} f_n(S)$ (見**定理** 4)」。

(3) 任選 k 人，計算每一種被選到的人中相鄰兩人的組數，試問這些組數的總和是多少？此問題相當於「求恰含 k 個元素的子集 S 之權數總和 $\sum_{|S|=k} f_n(S)$ (見**定理** 5)」。

(4) 任選幾人，計算每一種被選到的人中沒有相鄰者的數量，試問全部數量的總和是多少？此問題相當於「求全部子集 S 的孤立數總和 $\sum_{S\subset X_n} g_n(S)$ (見**定理** 8)」。

(5) 任選 k 人，計算每一種被選到的人中沒有相鄰者的數量，試問這些數量的總和是多少？此問題相當於「求恰含 k 個元素的子集 S 之孤立數總和 $\sum_{|S|=k} g_n(S)$ (見**定理**

9)」。

本作品所談的都是將 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ 依序排成一列的情況下（直線排列），探討子集合的權數及孤立元的問題，此時，1與 n 是不相鄰的。若將 X_n 依順時針方向排成一圓圈(環狀排列)，此時，1與 n 就會是相鄰的，即 $(n,1)$ 是一組連續數對。有興趣的讀者不妨花點心思去探討與研究，看看其一般性會出現怎麼樣驚豔的變化。

伍、附錄 （2024 TRML 思考賽試題 --- 集合的權數問題）

思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

設 S 是由某些正整數所組成的集合。我們以 $c(S)$ 表示集合 S 所含**相鄰數對** $(i,i+1)$ 的組數。例如：$S=\{1,2,3,4,6,7,9\}$ 中的相鄰數對共有以下 4 組：

$$(1,2),(2,3),(3,4),(6,7)\text{ ，}$$

此時，$c(S)=4$。

設 $X_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$，其中 n 為正整數。對非負整數 $k\le n$，我們令 $f_n(k)$ 表示在 X_n 的子集合中，滿足 $c(S)=k$ 的所有子集合 S 之個數。例如：集合 X_4 中滿足 $c(S)=1$ 的子集合 S 都恰有1組相鄰數對，此種子集合 S 共有以下 5 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\text{ ，}$$

故 $f_4(1)=5$；而滿足 $c(S)=2$ 的子集合 S 都恰有 2 組相鄰數對，此種子集合 S 共有 2 種：$\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$，故 $f_4(2)=2$。

本試卷有兩個主要的評量目標：其一是求出 X_n 中有多少種的子集合 S 滿足相鄰數對的組數 $c(S)=k$，即求 $f_n(k)$ 的值；另一則是計算 X_n 中所有子集合或至少(恰)有 k 個元素的所有子集合 S 之 $c(S)$ 值的總和。例如：X_4 中恰含 2 個元素的子集合 S 共有6種：$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$，其 $c(S)$ 值分別為 $1,0,0,1,0,1$，此時，這些 $c(S)$ 值的總和為 $1+0+0+1+0+1=3$。又如：X_4 中滿足 $c(S)>0$ 的子集合 S 共有以下 8 種：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3|,\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$$，

其 $c(S)$ 值分別為 $1,1,1,1,1,2,2,3$，因此，X_4 的所有子集合 S 之 $c(S)$ 值的總和為 $1+1+1+1+1+2+2+3=12$。

試依序回答下列問題。

(1) 試求集合 $S=\{1,3,4,5,6,8,9,10,12,13\}$ 的 $c(S)$ 值，並列出 S 的所有相鄰數對。
(2) 試求 $f_5(1)$ 的值，請說明理由或列出 X_5 的子集合中滿足 $c(S)=1$ 的所有子集合 S。
(3) 試求 $f_6(2)$ 的值，請說明理由或列出 X_6 的子集合中滿足 $c(S)=2$ 的所有子集合 S。
(4) 試求 $f_7(3)$ 的值，請說明理由或列出 X_7 的子集合中滿足 $c(S)=3$ 的所有子集合 S。
(5) 試求 $f_{12}(0)$ 的值，並請說明理由。
(6) 對任意正整數 n，試求 $f_n(1)$ 的值，並請說明理由。
(7) 對 X_5 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。
(8) 設正整數 $n\geq 2$。對 X_n 的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。
(9) 對 X_9 中**至少 4 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。
(10) 設正整數 $n\geq k\geq 2$。對 X_n 中**恰有 k 個元素**的所有子集合 S，試求 $c(S)$ 值的總和，並請說明理由。

參考資源

何焱銘。財團法人九九文教基金會。https://www.99cef.org.tw

臺灣數學奧林匹亞競賽（IMO）。數學奧林匹亞辦公室，國立臺灣師範大學數學系。https://www.math.ntnu.edu.tw

American Mathematics Competition (AMC), Mathematical Association of America, https://maa.org/math-competition.

參考文獻

Brualdi, R. A. (1992). *Introductory combinatorics* (3rd ed.). Prentice Hall.

Liu, C. L. (1968). *Introduction to combinatorial mathematics*. McGraw-Hill.

Lovász, L., Pelikán, J., & Vesztergombi, K. (2003). *Discrete mathematics: Elementary and beyond*. Springer.

Rosen, K. H. (2019). *Discrete mathematics and its applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.