

# 111 物理分科測驗部分試題解析

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

## 壹、前言

關於 111 年首次舉行物理分科測驗其中第壹部分、選擇題的第 11 題(與不確定相關)和第 15 題(與電流磁效應有關) 這兩道題，坊間參考書和 youtube 上的解題者，對這兩題所提供的參考解，若不是觀念上有小瑕疵，就是不盡完善。作者針對這兩題提供較正確與完善的解法，供讀者參考。

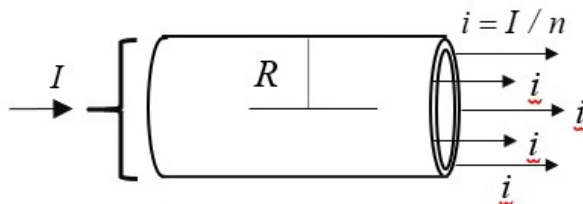
## 貳、分析

### 一、選擇題第 11 題

在研究浮體時，同學推測圓柱浮體能否穩定維持直立，與密度有關。故決定先測量圓柱體的體積，而以同一根米尺對圓柱體的直徑與高度各測量 4 次，結果記錄於下表，最右 3 欄為計算機運算程式所給 4 次測量值的平均值、標準差平方與 1/12。

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	平均值	標準差平方	1/12
直徑 (mm)	121.2	121.5	121.0	121.9	121.400	0.1533333	0.083333
高度 (mm)	100.0	100.8	100.4	101.2	100.600	0.2666667	0.083333

### 二、選擇題第 15 題



中空圓筒形導體中的電流所產生的磁場，會對其載流粒子施加磁力，故被用於設計能提供安全核能且燃料不虞匱乏的核融合反應器。右圖所示為筒壁很薄、半徑為  $R$  的鋁製長直圓筒，電流  $I$  平行於筒軸穩定流動，均勻通過筒壁各截面，而可當作為  $n$  條完全相同且平行的長直載流導線，每條導線的電流都為  $i = I/n$ 。若  $n$  比 1 大得多，並以  $\vec{p}$  代表每單位面積垂直作用於筒壁的磁力，則下列敘述哪些正確？

- (A)  $\vec{p}$  沿半徑向筒外 (B)  $\vec{p}$  沿半徑向筒內 (C)  $|\vec{p}|$  與  $R^2$  成正比  
 (D)  $|\vec{p}|$  與  $I$  成正比 (E)  $|\vec{p}|$  與  $I^2$  成正比

### 參、解法

#### 【選擇題第 11 題解法】

坊間參考書和 youtube 上對『組合不確定度』都認為應取“2”位有效數字，因此皆認為選項(A)和(B)的組合不確定度只取“1”位有效數字，是錯誤的選項。然而根據 ISO-GUM<sup>註 1</sup>對於『組合不確定度』有如下的敘述：組合不確定度的取法是無條件進位法，『至多』取兩位有效數字。而測量值的組合不確定度  $u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ ，其中  $u_A$  為『A 類不確定度』，定義為

$$u_A = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n}} = \frac{(\text{樣本})\text{標準差}}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

其中  $x_i$  為第  $i$  個測量值， $\bar{x}$  為平均值， $n$  為測量次數。

題目中顯示標準差平方的欄位是代表『樣本標準差』的平方。 $u_B$  為『B 類不確定度』，定義為

$$u_B = \frac{\text{儀器上最小刻度}}{2\sqrt{3}} \quad (2)$$

題目中最右的欄位『1/12』即是『 $1/2\sqrt{3}$ 』的平方。  
 由題意知：

$$u_A^2 = \frac{(\text{樣本標準差})^2}{n} = \frac{0.1533333}{4} \text{ mm}^2 \quad (3)$$

$$u_B^2 = \left( \frac{1\text{mm}}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{12} \text{mm}^2 = 0.083333 \text{mm}^2 \quad (4)$$

從欄位中所給的數字『0.1533333』和『0.083333』可知，在求取不確定度的過程中，是不必依照有效數字四則運算法，得出計算結果的有效位數，而是依 ISO-GUM『組合不確定度』的取法：以無條件進位法，『至多』取兩位有效數字。

如此得直徑的組合不確定度

$$u_C = \sqrt{\frac{0.1533333}{4} + 0.083333} = 0.3488 \dots \approx 0.35 \approx 0.4 \text{ mm} \quad (5)$$

最後將測量值以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致。若取一位有效數字，直徑的測量值應表示為  $(121.4 \pm 0.4) \text{ mm}$ ，或取兩位有效數字，得直徑的測量值應表示為  $(121.40 \pm 0.35) \text{ mm}$ ，因此選項 (A) 和 (B) 皆錯。

同理可得：高度的組合不確定度

$$u_C = \sqrt{\frac{0.2666667}{4} + 0.083333} = 0.3872 \dots \approx 0.39 \approx 0.4 \text{ mm} \quad (6)$$

高度的測量值應表示為  $(100.6 \pm 0.4) \text{ mm}$  或  $(100.60 \pm 0.39) \text{ mm}$   $\Leftrightarrow$  選項 (C) 對，(D) 錯。至於圓柱體體積的組合不確定度的計算，會利用下列的公式：

公式一 若  $Z = kX^m$ ，則導出量的不確定度  $u(Z)$  與  $Z$  的關係為：

$$\frac{u(Z)}{|Z|} = |m| \frac{u(X)}{|X|} \quad (7)$$

公式二 若  $Z = XY$ ，則導出量的不確定度  $u(Z)$  與  $Z$  的關係為：

$$\frac{u(Z)}{|Z|} = \sqrt{\left( \frac{u(X)}{X} \right)^2 + \left( \frac{u(Y)}{Y} \right)^2} \quad (8)$$

上述公式中為確保不確定度為『+』值，故在  $Z$  和  $X$  上加上【絕對值】，且假設公式二中的  $X$  和  $Y$  為兩個獨立變數。

圓柱體體積  $V = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)h$ ，其中  $D$  和  $h$  各為圓柱體的直徑和高，令  $X = \frac{\pi D^2}{4}$ 、

$Y = h$ ，則

$$X = \frac{3.14 \times 121.40^2}{4} = 11569.298 \quad (9)$$

利用公式一，得

$$u(X) = 11569.298 \times 2 \times \left(\frac{0.35}{121.40}\right) \approx 66.7 \approx 67 \text{ mm}^2 \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow X \pm u(X) = 11570 \pm 67 \text{ mm}^2 \quad (11)$$

圓柱體體積

$$V = 11570 \times 100.60 = 1163942 \text{ mm}^3 \quad (12)$$

利用公式二，得

$$u(V) = 1163942 \times \sqrt{\left(\frac{67}{11570}\right)^2 + \left(\frac{0.39}{100.60}\right)^2} \approx 8111.17 \approx 8.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad (13)$$

體積的測量值應表示為  $(1164 \pm 9) \times 10^3 \text{ mm}^3$  或  $(1163.9 \pm 8.2) \times 10^3 \text{ mm}^3$   $\Leftrightarrow$  選項(E) 錯。

### 【選擇題第 15 題參考解法】

坊間參考書和 youtube 上對於此題的解說，大都停留在定性的描述，並沒有把真正的結果推導出來。以下作者將根據題目所做『筒壁很薄、半徑為  $R$  的鋁製長直圓筒，電流  $I$  平行於筒軸穩定流動，均勻通過筒壁各截面，而可當作為  $n$  條完全相同且平行的長直載流導線，每條導線的電流都為  $i = I/n$ 』的假設，推導出這些物理參數之間的關係式。

假設中空圓筒形導體長  $L$ ，我們取寬為  $\frac{2\pi R}{n}$ ，此中空圓筒形可視為  $n$  條完全相同且平行的長直載流導線，每條導線的電流都為  $i = I/n$ 。現任取其中一條長直載流導線，它

受其它任何一對『對稱』且平行於該導線的長直載流導線(見圖)，由於電流方向相同，這一對的長直載流導線，對該導線所施的磁力均為吸引力，由於對稱關係，此導線所受的合磁力為

$$d\vec{F}_{\text{合}} = 2 \left\{ \frac{I \cdot L}{n} \cdot \frac{\mu_0 \left( \frac{I}{n} \right)}{2\pi \left( 2R \cos \frac{\theta}{2} \right)} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right\} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2n^2 \pi R} \quad (1)$$

施力於該長直載流導線共有  $(n-1)/2$  對對稱導線，因此所受的總磁力為

$$F = \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{\mu_0 I^2 L}{2n^2 \pi R} \quad (2)$$

力的方向為沿半徑向筒內。

又該長直載流導線單位面積所受的總磁力

$$|\vec{P}| = \frac{\frac{(n-1) \cdot \mu_0 I^2 L}{2 \cdot 2n^2 \pi R}}{L \cdot \frac{2\pi R}{n}} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \cdot \frac{n-1}{n} \approx \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \quad (3)$$

上式已取  $n \rightarrow \infty$ 。因此本題的答案為 (B)(E)

註 1：

根據『JCGM 100:2008 GUM 1995 with minor corrections : Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement』第 26 頁的敘述：【The numerical values of the estimate  $y$  and its standard uncertainty  $u_c(y)$  or expanded uncertainty  $U$  should not be given with an excessive number of digits. It usually suffices to quote  $u_c(y)$  and  $U$  [as well as the standard uncertainties  $u(x_i)$  of the input estimates  $x_i$ ] to at most two significant digits, although in some cases it may be necessary to retain additional digits to avoid round-off errors in subsequent calculations.】，『組合不確定度』“至多”可以取“2”位有效數字。

## 參考文獻

林秀豪、鄭呈因、張銘傑、徐國誠、張智詠 (2023)。Ch1-1 簡介不確定度。載於林秀豪(主編)，**選修物理 I (全)** (4-18 頁)。龍騰文化。  
林秀豪、鄭呈因、張銘傑、徐國誠、林子立、吳易哲 (2023)。Ch2-3 載流導線所受的磁力。載於林秀豪(主編)，**選修物理 IV (全)** (77-82 頁)。龍騰文化。