

利用 IQ 燈破解六軸星

游曉琦^{1*} 王儷娟² 蔣小娃³

¹臺中市居仁國民中學學退休教師

²臺南市立仁德文賢國民中學

³國立苗栗高級商業職業學校

壹、前言

我們在「從四軸星組木摺紙談起」的文章中[1]討論了 John 和 Jane Kostick 所設計的 Tetraxis®，認識了其內部的空間是一個菱形 12 面體，也可以將 Tetraxis®的每個零件以柱狀的物體取代，則可形成不同效果的成品。如果以細木棒取代 Tetraxis®的零件，再將互相平行的四組木棒兩端束好，則可製作出四軸的 John Kostick's Stars(如圖 1)。在 Kostick 的資料圖片中，還有六軸的 John Kostick's Stars[2]，有四軸星的成功經驗後，我們繼續了六軸星的探究。

如果四軸星的核心是菱形 12 面體，那麼六軸星的核心會是甚麼形體呢?很自然的我們想到了同樣是由菱形組成的多面體，菱形 30 面體。四軸星的操作是將 Tetraxis®的零件以細木棒替代，其實就等同於在菱形 12 面體的每一個面上放置一根細木棒。所以如果以類似的方法使用在菱形 30 面體上，會是甚麼情形呢?

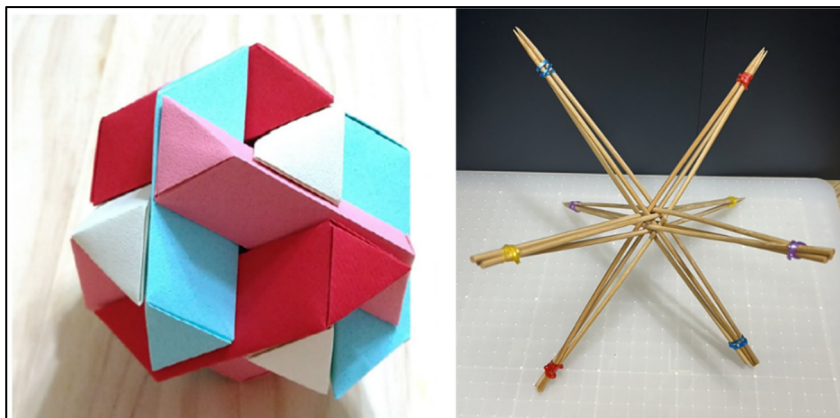


圖 1：Tetraxis®（左）；四軸星（右）

*為本文通訊作者

貳、關於菱形 30 面體

菱形 30 面體(Rhombic triacontahedron)顧名思義，它的三十個面都是菱形，而且都是全等的黃金菱形。什麼是黃金菱形？就是指對角線長度的比值為 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ 的菱形。菱形 30 面體的 30 個面是依著什麼樣的規律組合在一起呢？我們將從柏拉圖多面體中的正 12 面體和正 20 面體說起，認識其在直角坐標系中的頂點坐標後，再將正 12 面體和正 20 面體的頂點連接，就可以得到菱形 30 面體了！

一、正 12 面體(Dodecahedron)

柏拉圖多面體包含正 4 面體、正 6 面體、正 8 面體、正 12 面體和正 20 面體。其中的正 12 面體有 20 個頂點，30 個邊，以及 12 個正五邊形的面。它的 20 個頂點的分布有一些規律很值得觀察，有 12 個頂點形成三個互相垂直的矩形，包含矩形 ABCD、矩形 EFGH 和矩形 LMNO，如圖 2，其坐標為 $A(1/\varphi, 0, \varphi)$ 、 $B(-1/\varphi, 0, \varphi)$ 、 $C(-1/\varphi, 0, -\varphi)$ 、 $D(1/\varphi, 0, -\varphi)$ 、 $E(\varphi, -1/\varphi, 0)$ 、 $F(\varphi, 1/\varphi, 0)$ 、 $G(-\varphi, 1/\varphi, 0)$ 、 $H(-\varphi, -1/\varphi, 0)$ 、 $L(0, -\varphi, 1/\varphi)$ 、 $M(0, -\varphi, -1/\varphi)$ 、 $N(0, \varphi, -1/\varphi)$ 、 $O(0, \varphi, 1/\varphi)$ 。另外的 8 個頂點分別落在八個象限形成正立方體如圖 3，坐標分別為 $(1,1,1)$ 、 $(-1,1,1)$ 、 $(-1,-1,1)$ 、 $(1,-1,1)$ 、 $(1,1,-1)$ 、 $(-1,1,-1)$ 、 $(-1,-1,-1)$ 、 $(1,-1,-1)$ 。

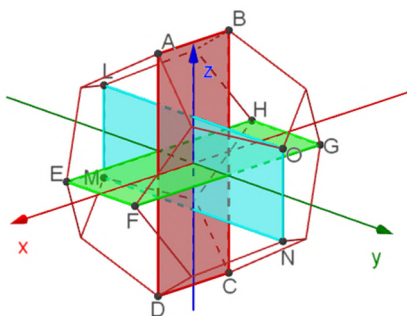


圖 2：正 12 面體與三個互相垂直的矩形

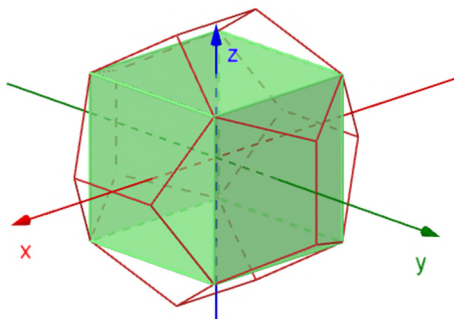


圖 3：正 12 面體與正立方體

二、正 20 面體(Icosahedron)

正 20 面體(Icosahedron)，它有 12 個頂點，30 個邊以及 20 個正三角形的面。12 個頂點恰巧構成三個互相垂直的黃金矩形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 、黃金矩形 $E_1 F_1 G_1 H_1$ 和黃金矩形 $L_1 M_1 N_1 O_1$ 的頂點上，各個頂點的座標分別為 $A_1(0,1,\varphi)$ 、 $B_1(0,-1,\varphi)$ 、 $C_1(0,-1,-\varphi)$ 、 $D_1(0,1,-\varphi)$ 、 $E_1(\varphi,0,1)$ 、 $F_1(\varphi,0,-1)$ 、 $G_1(-\varphi,0,-1)$ 、 $H_1(-\varphi,0,1)$ 、 $L_1(1,-\varphi,0)$ 、 $M_1(-1,-\varphi,0)$ 、 $N_1(-1,\varphi,0)$ 、 $O_1(1,\varphi,0)$ ，如圖 4。

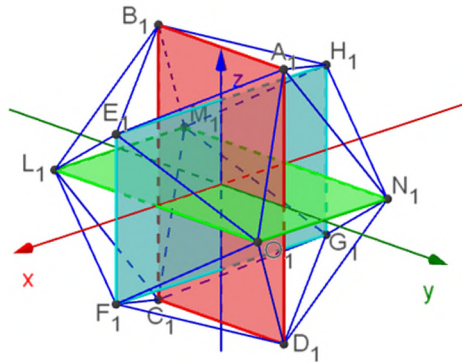


圖 4：正 20 面體與三個互相垂直的黃金矩形

三、菱形 30 面體

將上述的正 12 面體和正 20 面體放在同一個直角坐標系如圖 5，觀察其所有頂點位置，E、F 二點是正 12 面體的頂點，坐標分別為 $(\varphi, -1/\varphi, 0)$ 、 $(\varphi, 1/\varphi, 0)$ ； E_1 、 F_1 二點是正 20 面體的頂點，坐標分別為 $(\varphi, 0, 1)$ 、 $(\varphi, 0, -1)$ 。四個點的 x 坐標皆為 φ ，可知四個點共平面，都在平面 $x=\varphi$ 上。又 $\overline{EE_1} = \overline{E_1F} = \overline{FF_1} = \overline{EF_1} = \sqrt{1^2 + (1/\varphi)^2}$ ；而且 $\overline{E_1F_1}=2$ ， $\overline{EF}=2/\varphi$ ，為四邊形 EE_1FF_1 的兩對角線，比值 $\overline{E_1F_1}/\overline{EF} = \varphi$ ，恰是黃金比，所以四邊形 EE_1FF_1 為一黃金菱形。亦即正 12 面體 \overline{EF} 邊與正 20 面體的 $\overline{E_1F_1}$ 邊是黃金菱形 EE_1FF_1 的對角線，所以同理可證正 12 面體與正 20 面體的各邊可以一一配對形成一個黃金菱形，即可得到 30 個黃金菱形，組成菱形 30 面體，如圖 6。

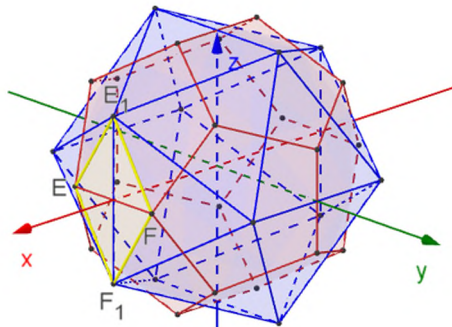


圖 5：黃金菱形

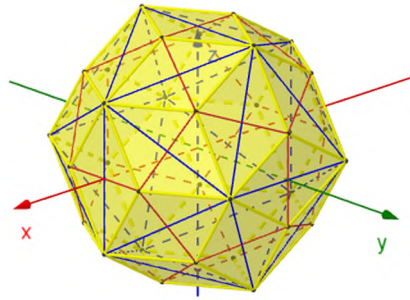


圖 6：菱形 30 面體

菱形 30 面體，有 30 個面(黃金菱形)，60 個邊以及 32 個頂點，其中的 20 個頂點是 3 個菱形共頂點，如圖 7；另外的 12 個頂點則是 5 個菱形共頂點，如圖 8。接著，將利用這美麗的結構創作出神奇的藝數品！

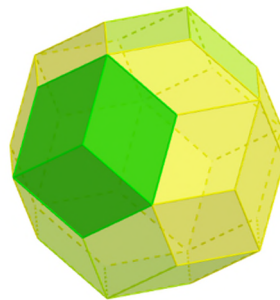


圖 7：3 個菱形共頂點

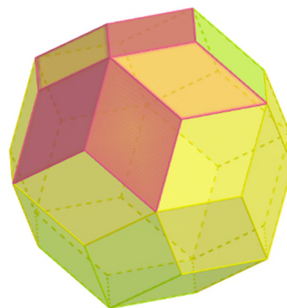


圖 8：5 個菱形共頂點

參、IQ 燈(IQ light)

IQ 燈是丹麥設計師 Holger Strøm 於 1972 年原創設計的燈飾。它以單一形狀的燈片模塊(以下簡稱為燈片)，組成多種不同的造型，且藉由燈片重疊造成的不同透光性，亮燈時形成特別的視覺效果，受到大家的喜愛。最常見到的是以 30 個燈片組成的近似球狀外觀，如圖 9。

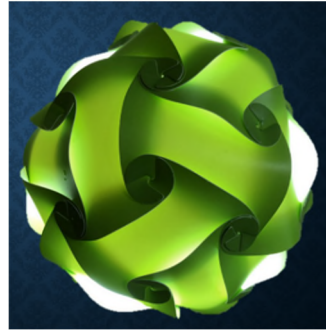


圖 9：IQ 燈

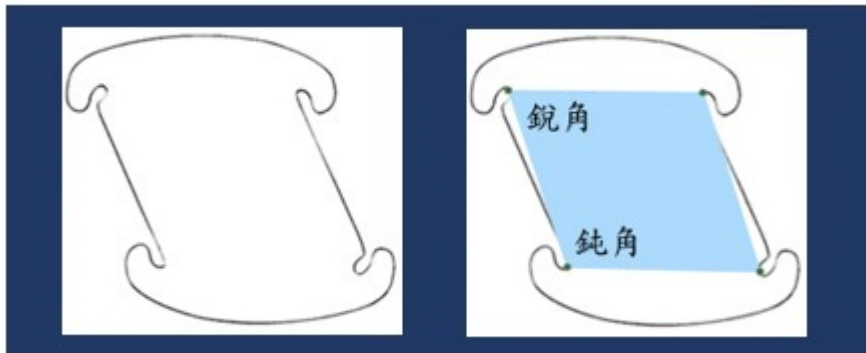


圖 10：IQ 燈片

IQ 燈的 IQ 兩個字母，其實是「Interlocking Quadrilaterals」的縮寫，代表它的每個燈片，是個可以互扣的四邊形。將燈片的 4 個扣合處頂點連接起來，是一個平行四邊形，如圖 10，它有兩個銳角和兩個鈍角。30 片組合的 IQ 燈，就是將 5 個燈片以銳角端相扣合，鈍角端以 3 個燈片相扣合而形成，組合過程中，可以清楚的看到在球體內部互相扣鎖的燈片，呈現菱形的圖樣，如圖 11，其實它就是菱形 30 面體的結構。



圖 11：IQ 燈組合結構

由前面的介紹中，已知菱形 30 面體的每個面是黃金菱形，其兩條對角線的比值為黃金比 ϕ ，計算圖 10 中 IQ 燈片內的平行四邊形邊長，會發現它並不是菱形，且兩條對角線的比值也非黃金比，但是為何它卻能形成近似菱形 30 面體的外觀呢？在實際操作的過程中，一定會感受到每個燈片扣合成立體時，都會需要略微彎曲，這個彎曲，不僅有造型上的美感，也可以在空間中改變四邊形的邊長和對角線的比值，達到近似菱形 30 面體的需求。如果使用 12 張燈片，也能組合成近似菱形 12 面體的外觀，如圖 12，而菱形 12 面體的每個面是對角線比值為 $\sqrt{2}$ 的菱形。真是佩服設計者的巧思，利用燈片彎曲，使菱形的形狀可以做出變化。難怪設計者標榜用單一零件，就可變化出多種不同的 IQ 燈飾系列造型。且因為這個扣合過程產生的彎曲，使燈片之間產生間隙，讓我們更為方便的應用在製作 N 軸星。



圖 12：12 片 IQ 燈

肆、利用 IQ 燈製作六軸星

四軸星的操作是將 Tetraxis® 的零件以細木棒替代，即是將菱形 12 面體的每一個面以一支細木棒取代。想將此方法應用在菱形 30 面體上，首先需要有一個菱形 30 面體。藉助 IQ 燈片的協助，我們在製作菱形 30 面體的幾何模型，將更加方便和快速。

- 一、材料：30 片 IQ 燈、細木棒 30 枝、橡皮筋 12 條
- 二、六軸星製作

有了製作四軸星的經驗，大膽的推測，將 30 片 IQ 燈(即為菱形 30 面體) 的每個燈片穿過一支木棒，30 支木棒要形成 6 軸，則每軸應是要由 5 支平行的木棒所組成。觀察 30 片 IQ 燈的結構，32 個頂點也是分成兩類，一種是由 5 個燈片的銳角端所構成，如圖 13 左，稱之為 A 型頂點；另一種是由 3 個燈片的鈍角端所構成，如圖 13 右，稱之為 B 型頂點。

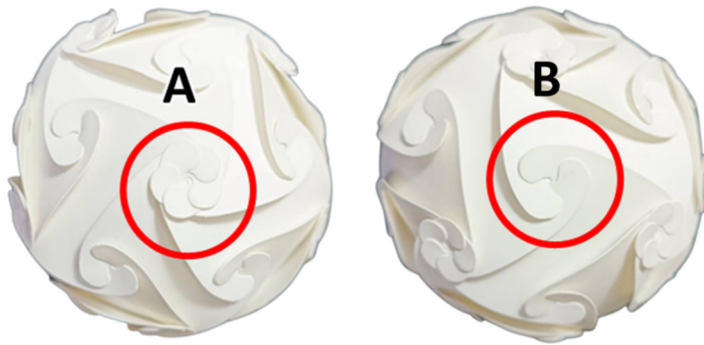


圖 13：A 型頂點（左）；B 型頂點（右）

從任一個 A 型頂點處觀看，可將其分解為第一層有 5 個燈片(白色)，第二層有 5 個燈片(紅色)，如圖 14，這兩層形成頂部；第三層有 10 個燈片如同腰帶一樣環繞中間(黃色和藍色各 5 片)，如圖 15，第五層和第四層則與第一層和第二層相同，形成底部。底部的頂點也是 A 型頂點。要使通過燈片的五支木棒會互相平行，那麼一定是第三層腰帶中的那五個藍色燈片，如圖 16。



圖 14：IQ 燈第一層白色(W)，第二層紅色(R)

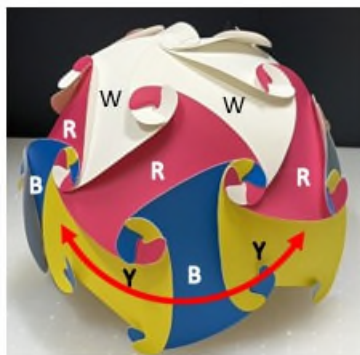


圖 15：IQ 燈第三層黃色(Y)和藍色(B)交錯



圖 16：五支平行木棒

30 片 IQ 燈共有 12 個 A 型頂點，完成上述步驟後，只需轉動一下方向，讓另一個 A 型頂點在最頂端，即可完成第二組平行木棒的穿插。共有六個方向要操作，可以每完成一組，即先用橡皮筋輕輕束住，以利觀察，製作過程如圖 17。

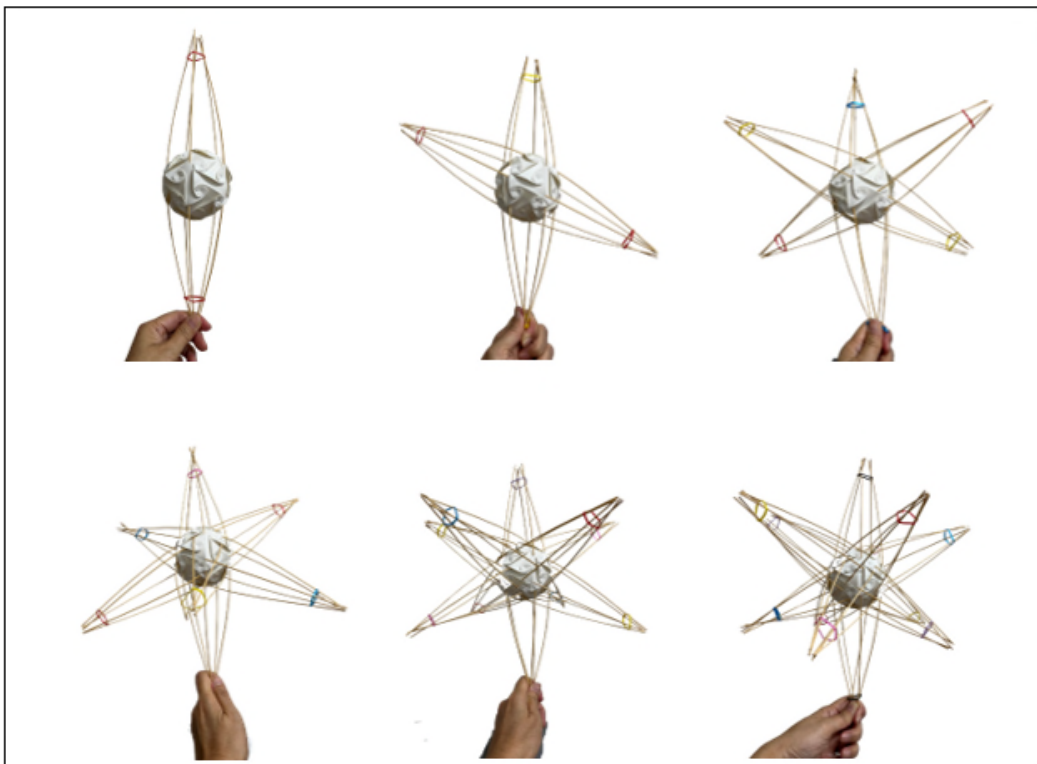


圖 17：六軸星製作過程

最後拆除燈片，並將木棒兩端固定，即完成六軸星，如圖 18。

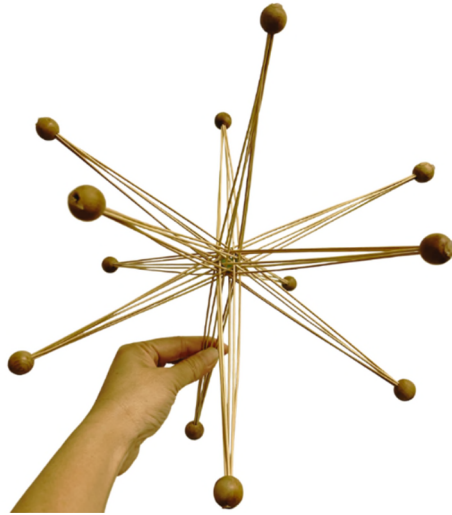


圖 18：六軸星完成圖

伍、結語

以上經由觀察 30 片 IQ 燈的 A 型頂點，輕輕鬆鬆完成了每組 5 支平行木棒，共計六組的六軸星作品。讀者也可以想一想 30 片 IQ 燈的 B 型頂點有多少個呢？如果換成觀察 B 型頂點，是否也可以得到一組 3 支的平行木棒？共計可以完成幾組呢？歡迎來挑戰！如圖 19。

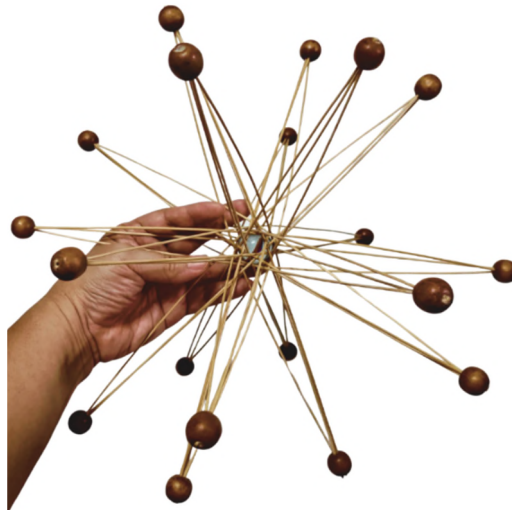


圖 19：B 型頂點組成的軸星

參考資料

- 李政憲、王儷娟 (2023)。從四軸星組木摺紙談起。《科學教育月刊》，460，24-32。
- Kosticks Design. (2026, January 26). Design and production of geometric structures. KosticksOfficial Site. www.kosticks.com