「整數分割乘積加總」恆等式的另證

連威翔

優食台灣股份有限公司

壹、前言

在教育部高中數學學科電子報的 [1] 文中，作者在文章一開始即說明他將會介紹一道涉及整數分割的恆等式，並先舉出底下三個例子：

$$\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j\geq 0}} i\cdot j = C_3^6, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k\geq 0}} i\cdot j\cdot k = C_3^8, \tag{2}$$

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=7\\ i,j,k,l\geq 0}} i\cdot j\cdot k\cdot l = C_3^{10}. \tag{3}$$

作者先驗證了(2)式的正確性，他列出了所有滿足 $i+j+k=6$ 的非負有序數組 (i,j,k) 並將所有數組相應的連乘積 $i\cdot j\cdot k$ 相加，發現總和恰好是組合數 C_3^8。

注意 [1] 文作者在文章第一節最後邀請讀者可自行研究或搜尋參考文獻，再繼續往下閱讀。因為看到上述邀請，筆者便沒有繼續往下閱讀[1]文，而是先觀察(1),(2),(3)三式。看出其中的規律後，筆者猜測有底下更一般的結果：

性質 1：已知 m,k 為正整數，且滿足 $m\geq k$，則有

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 0}} n_1\times n_2 \ldots \times n_k = C_{m-k}^{m+k-1}. \tag{4}$$

此時繼續往下看[1]文第二節，會見到一個名為「整數分割乘積加總」恆等式的性質及其證明，注意該性質在本質上與性質 1 完全相同，只是在敘述上有一些差異。觀察上面性質 1 的敘述，我們會發現(1),(2),(3)三式分別是對(4)式取

$$(m,k)=(5,2),(6,3),(7,4)$$

之後所得的結果，因此只要能證明(4)式，則(1),(2),(3)三式將隨之而成立。

在底下第二節中，筆者將介紹如何利用我們在高中時期就學過的數學歸納法對性質 1 寫下其證明。

貳、從一個有趣的組合性質談起

在介紹對性質 1 的證明之前，我們先看一個有趣的組合性質，此性質在後面的證明過程中將成為重要的推論依據，其敘述與證明如下：

性質 2：已知 r,s 為非負整數，則有

$$C_{r+1}^{r+s+1}=C_r^{r+s}+C_r^{r+s-1}+\cdots+C_r^r. \tag{5}$$

證明：我們可以先取一組 r,s 之值計算(5)式看看，例如可取 $r=2,s=5$，則可重複運用巴斯卡法則 $C_k^n=C_{k-1}^{n-1}+C_k^{n-1}$ 寫出如下的結果：

$$\begin{aligned}C_{2+1}^{2+5+1}&=C_3^8=C_2^7+C_3^7=C_2^7+C_2^6+C_3^6=C_2^7+C_2^6+C_2^5+C_3^5=C_2^7+C_2^6+C_2^5+C_2^4+C_3^4\\&=C_2^7+C_2^6+C_2^5+C_2^4+C_2^3+C_3^3=C_2^7+C_2^6+C_2^5+C_2^4+C_2^3+C_2^2,\end{aligned}$$

因此當 $r=2,s=5$ 時(5)式成立。而為了在一般情況下證明(5)式，我們仿照上述推導方式，同理可寫下

$$\begin{aligned}C_{r+1}^{r+s+1}&=C_r^{r+s}+C_{r+1}^{r+s}=C_r^{r+s}+C_r^{r+s-1}+C_{r+1}^{r+s-1}=C_r^{r+s}+C_r^{r+s-1}+C_r^{r+s-2}+C_{r+1}^{r+s-2}=\cdots\\&=C_r^{r+s}+C_r^{r+s-1}+\cdots+C_r^{r+1}+C_{r+1}^{r+1}=C_r^{r+s}+C_r^{r+s-1}+\cdots+C_r^{r+1}+C_r^r,\end{aligned}$$

因此(5)式成立，其中共用上了 s 次的巴斯卡法則，至此性質 2 證明完畢。讀者可以數數看上面我們改寫 C_{2+1}^{2+5+1} 時是不是用上了 5 次的巴斯卡法則，注意我們在改寫 C_{2+1}^{2+5+1} 之前是取 $s=5$。

注意性質 2 在本質上其實是所謂的 Hockey-stick identity，即曲棍球棒恆等式，請參考 [2]。當我們在巴斯卡三角形中將出現在(5)式的所有組合數圈起來後，所得的圖形會看似一根曲棍球棒，這是性質 2 有趣的一個地方，因為我們可以透過圖像來記憶它。

有了性質 2 之後，我們馬上可利用性質 2 推得下述性質：

性質 3：已知 r,s 為非負整數，則有

$$C_r^{r+s}+2C_r^{r+s-1}+\cdots+(s+1)C_r^r=C_{r+2}^{r+s+2}. \tag{6}$$

證明：將(6)的左式改寫後，再利用性質 2 推導如下：

$$\begin{aligned}&C_r^{r+s}+2C_r^{r+s-1}+\cdots+(s+1)C_r^r\\&\quad=(C_r^{r+s}+C_r^{r+s-1}+\cdots+C_r^r)+(C_r^{r+s-1}+C_r^{r+s-2}+\cdots+C_r^r)+\cdots+(C_r^{r+1}+C_r^r)\\&\quad+C_r^r=C_{r+1}^{r+s+1}+C_{r+1}^{r+s}+\cdots+C_{r+1}^{r+2}+C_{r+1}^{r+1}=C_{r+2}^{r+s+2},\end{aligned}$$

因此(6)式成立，至此性質 3 證明完畢。上式第一個等號的推導，可理解為計算下方表 1 中排成一直角三角形的所有組合數之和時，先把各行的組合數相加後再加總的結果等於先把各列的組合數相加後再加總的結果。

表 1

$$\begin{array}{ccccc}C_r^{r+s} & C_r^{r+s-1} & C_r^{r+s-2} & \cdots & C_r^r\\ & C_r^{r+s-1} & C_r^{r+s-2} & \cdots & C_r^r\\ & & C_r^{r+s-2} & \cdots & C_r^r\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & C_r^r\end{array}$$

而有了性質 3 後，我們就差不多可以開始準備證明性質 1 的結論(4)式成立了。回顧(4)的左式，不難證明有

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 0}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_k=\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 1}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_k, \tag{7}$$

這是因為當我們在(7)左式中選定一組滿足 $n_1+n_2+\cdots+n_k=m$ 的非負整數 $n_1,n_2,\ldots,n_k$ 之後，所對應到的連乘積 $n_1\times n_2\times\ldots\times n_k$ 只有在 $n_1,n_2,\ldots,n_k$ 皆為正整數時不為零。因此在計算(7)左式之值時可將 $n_1,n_2,\ldots,n_k$ 中至少有一個數為零的情況捨去，捨去之後，就只留下$n_1,n_2,\ldots,n_k$ 均為正整數的情況，把這些情況下所有可能的連乘積 $n_1\times n_2\times\ldots\times n_k$ 相加，即得(7)的右式，至此我們就理解了(7)式為何會成立。要提醒讀者的是，在[1]文第二節的段落(三)推導證明時也使用了(7)式，但[1]文作者並未特別加以說明。

而有了(7)式之後，我們先將性質 1 中的(4)式改寫為

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 1}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_k=C_{m-k}^{m+k-1}=C_{2k-1}^{m+k-1}, \tag{8}$$

其中上式最後一個等號用上了組合恆等式 $C_k^n=C_{n-k}^n$。因此只要能證明(8)式，那我們就證明了(4)式與性質 1。筆者對(8)式介紹其證明如下：

證明：使用數學歸納法，對(8)式中的正整數 k 進行歸納。當 $k=1$ 時，我們有

$$(8)\text{左式}=\sum_{\substack{n_1=m\\ n_1\geq 1}} n_1=m=C_1^m=C_{2k-1}^{m+k-1}=(8)\text{右式},$$

故此情況下(8)式成立。接著，假設當 $k=p$ 時(8)式成立，即有

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_p\geq 1}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_p=C_{2p-1}^{m+p-1}, \tag{9}$$

其中 $m\geq p$。當 $k=p+1$ 且 $m\geq p+1$ 時，(8)的左式為

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_{p+1}=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_{p+1}\geq 1}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_{p+1}, \tag{10}$$

將上述求和式對 n_{p+1} 作展開，注意由於 $n_1,n_2,\ldots,n_p,n_{p+1}\geq 1$，可知

$$n_1+n_2+\cdots+n_p\geq p,$$

搭配 $n_1+n_2+\cdots+n_{p+1}=m$ 的條件，可知

$$n_{p+1}=m-\left(n_1+n_2+\cdots+n_p\right)\leq m-p,$$

因此可確定 $1\leq n_{p+1}\leq m-p$。此時依據(9)式的歸納法假設，可將(10)式對 n_{p+1} 作展開並計算得如下結果：

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_{p+1}=m\\ n_1,n_2,\ldots,n_{p+1}\geq 1}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_{p+1}$$

$$=\sum_{n_{p+1}=1}^{m-p} n_{p+1}\left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=m-n_{p+1}\\ n_1,n_2,\ldots,n_p\geq 1}} n_1\times n_2\times\ldots\times n_p\right)$$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=m-1 \\ n_1,n_2,\ldots,n_p\geq 1}} n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p + 2 \times \left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=m-2 \\ n_1,n_2,\ldots,n_p\geq 1}} n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p \right) + \cdots$$

$$+ (m-p) \times \left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=p \\ n_1,n_2,\ldots,n_p\geq 1}} n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p \right)$$

$$= C_{2p-1}^{m+p-2} + 2C_{2p-1}^{m+p-3} + \cdots + (m-p)C_{2p-1}^{2p-1}. \tag{11}$$

觀察上式最後的結果，我們令 $r = 2p-1, s = m-p-1$，則有

$$r + s = m + p - 2, \quad s + 1 = m - p,$$

此時可先利用上述各式將(11)式最後的結果改寫，再利用性質 3 進行化簡，得到如下的結果：

$$C_{2p-1}^{m+p-2} + 2C_{2p-1}^{m+p-3} + \cdots + (m-p)C_{2p-1}^{2p-1} = C_r^{r+s} + 2C_r^{r+s-1} + \cdots + (s+1)C_r^r$$

$$= C_{r+2}^{r+s+2} = C_{2p+1}^{m+p} = C_{2(p+1)-1}^{m+(p+1)-1}, \tag{12}$$

注意上式倒數第二個等號用上了

$$r + 2 = 2p + 1, \qquad r + s + 2 = m + p$$

的計算結果。此時將(12)式的推論結果代入(11)式，可得

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_{p+1}=m \\ n_1,n_2,\ldots,n_{p+1}\geq 1}} n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_{p+1} = C_{2(p+1)-1}^{m+(p+1)-1},$$

而上式恰好是對(8)式取 $k = p+1$ 後所得的結果，其中 $m \geq p+1$，這表示當 $k = p+1$ 時(8)式亦成立，依據數學歸納法原理，可知(8)式對任意滿足 $m \geq k$ 的正整數 m, k 均成立，至此證明完畢。

而在透過數學歸納法完成上述對(8)式的證明後，我們知道性質 1 結論的(4)式成立，從而在[1]文的兩種證法之外得到了一個對性質 1 的另證。

本文最後，我們不妨回顧一下性質 1。關於性質 1，其實它有另一種敘述方式，若我們先對 i 為負整數的情況定義 $C_i^n = 0$，則只要再次利用上面將(4)式改寫為(8)式的想法，我們就可以使用下述性質來取代性質 1，注意在其前提中並未列出 $m \geq k$ 的限制條件：

性質 4：已知 m, k 為正整數，則有

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=m \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \geq 1}} n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k = C_{m-k}^{m+k-1}, \tag{13}$$

若要證明性質 4，則可先對 $m \geq k$ 的情況下利用上面的討論過程證明(13)式成立，接著再對 $m < k$ 的情況證明(13)式，這部分的證明補充如下：注意當 $m < k$ 時，(13)的右式有 $C_{m-k}^{m+k-1} = 0$。另一方面，若 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = m$ 有正整數解，則必然有 $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \geq k$，但因為此時 $m < k$，故可知 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = m$ 沒有正整數解，因此在(13)的左式我們找不到任何一組滿足條件的 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$，故(13)左式之值亦為 0，此時(13)式亦成立。

參、結語

本文只是簡單的心得分享，希望讀者在閱讀過後能有所收穫。在此筆者要先感謝本文第一個參考文獻的作者陳建燁先生，因為有他的作品發表在先，筆者才有機會完成本文。此外，筆者也要感謝台大名譽教授張鎮華先生以及科學教育月刊的審稿者先後對本文提出了修改建議，使本文的內容更加完善。

參考文獻

陳建燁（2016 年 11 月）。「整數分割乘積加總」恆等式。**教育部高中數學學科中心電子報，116**。 ghresource.k12ea.gov.tw

Gould, H. W. (1972). *Combinatorial identities*. Morgantown Printing and Binding Co.

Sinyor, J., Speevak, T., & Tefera, A. (2001). A new combinatorial identity. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *25*(6), 361–366.

Wikipedia. (2025). Hockey-stick identity. In *Wikipedia*. en.wikipedia.org