一道機率題目及其多種解法的介紹與討論

林福林
南臺科技大學

兩年多前加入臉書社團” 高中數學討論區”，開始密集接觸高中數學，期間看到一個機率題目，敘述如下：甲乙兩人猜拳，假設每次甲猜贏的機率為 1/2，猜輸的機率為 1/3，平手的機率為 1/6。規定每回合必須猜到有人猜贏為止，稱為一小回合。先連續猜贏兩個小回合者獲勝，則甲獲勝的機率為何？

題目以選擇題的形式出現，選項分別為 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{9}{13}$ (E) $\frac{16}{25}$ ，社團成員卓建宏提出解答為 $P(\text{甲獲勝}) = \frac{63}{95}$ ，個人猜測原題目應該是英文版，翻譯成中文時文字敘述改變了原題目的涵義，所以造成沒有正確的選項。但是我們仍然視中文的題目是正確的，本文的第一個解法即是參考卓建宏的解題稍作改寫，也是一般高中生最容易接受的解法。因為興趣，後續作者陸續使用其他技巧做出相同的答案，有些解題過程比較簡單，有些雖然複雜但適合各種更廣泛的題型，因此整理後提出此文以供學生及老師們參考，最後再加上一個挑戰題以比較分析各種方法的適用性，並建議「狀態圖之梅生增益公式法」是一種值得推廣的好方法。順道一提，雖然不認識卓建宏，但從他的臉書知道我們有一些共同經歷：都在中科院電子所服務過，軍職退伍時都領有榮譽國民證。

第一種解法也稱作無窮級數法，先考慮一個小回合，設甲猜贏的事件為 A，乙猜贏的事件為 B，平手的事件為 E，一小回合甲獲勝的機率計算如下：

$$\begin{aligned} P(\text{小回合甲勝}) &= \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(E)P(A)} + \mathrm{P^2(E)P(A)} + \cdots \\ &= \mathrm{P(A)} \times \frac{1}{1-\mathrm{P(E)}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{3}{5} \end{aligned} \tag{1}$$

由於猜拳平手不影響輸贏，因此一小回合甲獲勝的機率也可以如下計算：

$$P(\text{小回合甲勝})=\frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(A)+P(B)}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{5} \tag{2}$$

一小回合乙獲勝的機率則為 $P(\text{小回合乙勝})=1-P(\text{小回合甲勝})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$。設甲贏一小回合的事件為 C，乙贏一小回合的事件為 D，則甲先連續猜贏兩個小回合的機率計算如下：

$$\begin{aligned} P(\text{甲贏}) &= \mathrm{P^2(C)+P(D)\times P^2(C)+P(C)\times P(D)\times P^2(C)+P(D)\times P(C)\times P(D)\times P^2(C)}+\cdots \\ &= \mathrm{P^2(C)}\times[\frac{1}{\mathrm{1-P(C)\times P(D)}}+\frac{\mathrm{P(D)}}{\mathrm{1-P(C)\times P(D)}}]=\frac{9}{25}\times(1+\frac{2}{5})\times\frac{1}{1-\frac{6}{25}}=\frac{63}{95} \end{aligned} \tag{3}$$

第二種解法稱作解聯立方程式法，小回合猜贏的機率第一種做法已經算出，後續我們將直接採用。為了方便說明，我們先畫出對應的狀態圖如圖 1，其中各種狀態以紅色圓圈表示，圓圈內的數字 1 表示甲贏 1 次，2 表示甲連贏 2 次，負號表示甲輸，最底下的小圓點代表初始狀態。帶箭頭的曲線表示一個經過一個小回合，曲線旁的數字是對應的轉移機率。

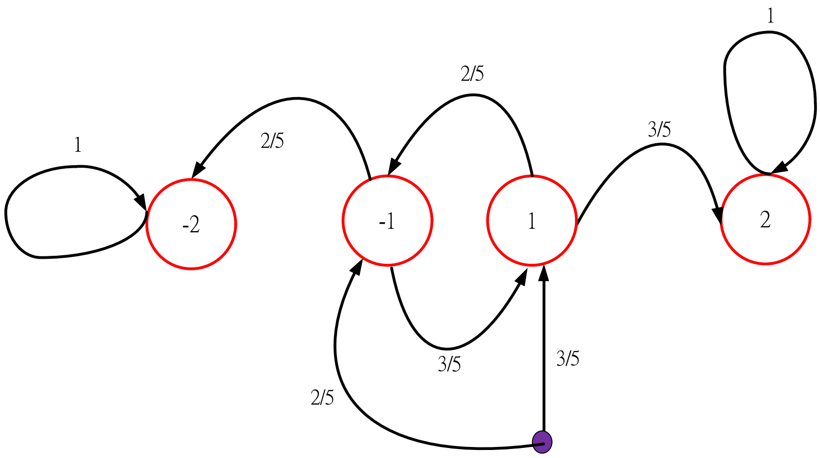

圖 1 ：描述甲乙兩人猜拳輸贏過程的狀態圖

假設甲贏一小回合後贏一大回合機率是 y，甲輸一小回合後贏一大回合機率是 x，參考圖 1 可以列出關係式如下：

$$y=\frac{3}{5}\times 1+\frac{2}{5}x \quad 及 \quad x=\frac{3}{5}y+\frac{2}{5}\times 0 \tag{4}$$

(4)式中乘上的 0 表示甲已經輸了的情況。解聯立方程式得 $x=\frac{9}{19}, y=\frac{15}{19}$，由於甲贏一小回合機率是 $P(\text{小回合甲勝})=\frac{3}{5}$，$P(\text{小回合甲輸})=\frac{2}{5}$，甲先連續猜贏兩個小回合的機率計算如下：

$$P(\text{甲贏})=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{2}{5}\times\frac{9}{19}+\frac{3}{5}\times\frac{15}{19}=\frac{63}{95} \tag{5}$$

與第一種解法求得的答案是一樣的。

第三種解法稱作馬可夫鏈轉移矩陣法，是參考大學教科書(Childers, 1997)的做法，此書在頁數 p180-p182 中採用右轉移矩陣，由於目前高中課本使用左轉移矩陣，因此這裡的運算技巧也會跟著修正。設定觀察的 4 種狀態為 $S_1='-2'$，$S_2='2'$，$S_3='-1'$ 及 $S_4='1'$，其中 $S_1='-2'$ 與 $S_2='2'$ 為吸收狀態(absorbing state)，寫出左轉移矩陣如下：

$$T=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} I & L \\ \hdashline O & M \end{array}\right] \tag{6}$$

其中 $M=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$，$L=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$為單位矩陣，$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$為零矩陣。

計算 C 矩陣如下

$$C = L\cdot(I-M)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{19} & \frac{4}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{15}{19} \end{bmatrix} \tag{7}$$

上式中矩陣元素 $C(2,1)=\frac{9}{19}$ 即是從狀態 $S_3='-1'$ 出發，最後到達吸收狀態 $S_2='2'$ 的機率， $C(2,2)=\frac{15}{19}$ 即是從狀態 $S_4='1'$ 出發最後到達吸收狀態 $S_2='2'$ 的機率，所以甲先連續猜贏兩個小回合的機率計算如下：

$$P(\text{甲贏}) = \frac{2}{5}\times\frac{9}{19}+\frac{3}{5}\times\frac{15}{19}=\frac{63}{95} \tag{8}$$

很明顯的，(8)式與(5)式有完全相同的結構。

第四種解法稱作狀態圖直接簡化法，是參考大學教科書(Misra, 2004)的做法，此本教科書是射頻微波通訊電路方面的專書,在頁數 p398 處理的是信號流程圖(signal flow graph)的問題，此圖與轉移機率狀態圖類似，因此我們把他的處理技巧移植到機率問題的處理。先做一些名詞的介紹，參考圖 1，每一個狀態稱為節點(node)，兩節點之間帶有箭頭的線稱為分支(branch)，從一個節點出發，沿著箭頭方向回到出發的節點，稱為迴路(loop)，也有人稱為迴圈。簡化狀態圖的三個基本原則敘述如下：(1)並聯相加，(2)串聯相乘，(3)迴路退回。

先舉個簡單的例子,假設我們關心的是從狀態 $S_4='1'$ 出發,最後到達吸收狀態 $S_2='2'$ 的機率是多少，對應的狀態圖如圖 2 的左圖，左圖中左邊有一個迴路，迴路增益為 $L=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$ ，迴路退回之後往前乘 $\frac{1}{1-L}=\frac{25}{19}$ ，簡化成右圖，利用串聯相乘得到從狀態 $S_4='1'$ 出發，最後到達吸收狀態 $S_2='2'$ 的機率是 $P(S_4\to S_2)=\frac{25}{19}\times\frac{3}{5}=\frac{15}{19}$ ，與第三種解法中(7)式矩陣 $C(2,2)=\frac{15}{19}$ 相符，也與第二種解法中的 $y=\frac{15}{19}$ 相符，可說是殊途同歸。

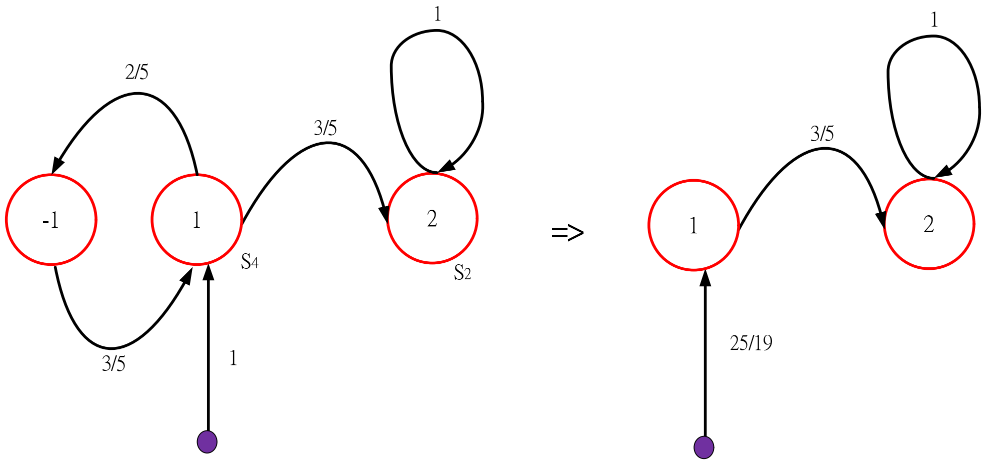

圖 2： 狀態圖簡化的例子

再回到第四種解法，如圖 3 左圖所示，不考慮吸收狀態的情況下此圖只有一個迴路，迴路增益 $L=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，往前乘上 $\frac{1}{1-L}=\frac{25}{19}$，分別得到小回合甲輸的 $P_{-1}=\frac{25}{19}\times\frac{2}{5}=\frac{10}{19}$ 及小回合甲贏的 $P_{1}=\frac{25}{19}\times\frac{3}{5}=\frac{15}{19}$，結果示於右圖。利用串聯相乘及並聯相加的規則，甲先連續猜贏兩個小回合的機率計算如下：

$$P(\text{甲贏})=(\frac{10}{19}\times\frac{3}{5}+\frac{15}{19})\times\frac{3}{5}=\frac{63}{95} \tag{9}$$

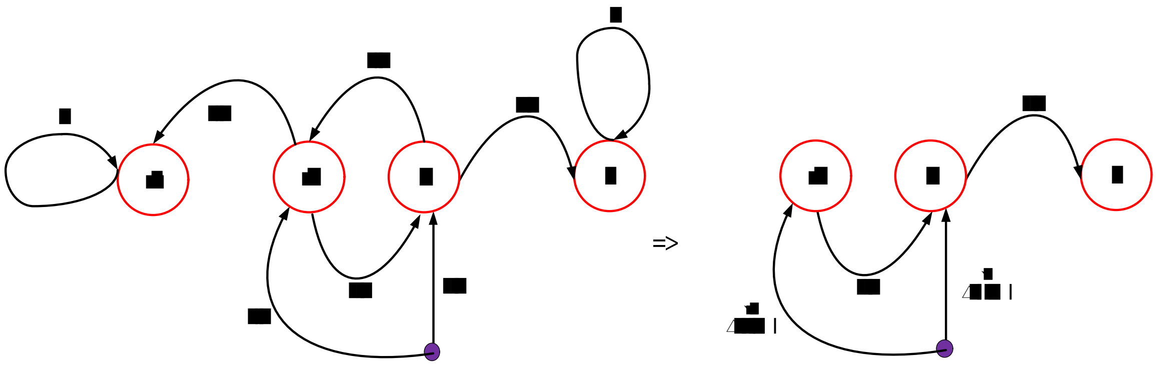

圖 3： 第四種解法之狀態圖簡化的過程

第五種解法稱作狀態圖之梅生增益公式法，是參考大學教科書(Misra, 2004)在頁數 p399-400 的做法，當信號流程圖趨向複雜時，此方法可以較快速的直接計算處理。根據轉移機率狀態圖的梅生增益規則(Mason’s gain rule)如下：

$$P = \frac{P(f_1)\Delta_1 + P(f_2)\Delta_2 + \cdots}{\Delta} \tag{10}$$

為了方便說明，將圖 1 中不需處理的 $S_1 = '-2'$ 去掉重畫如圖 4，可以看到兩條順向路徑，順向路徑是指從一開始的出發點直通到目的地的路徑，順向路徑不含任何的迴路。以圖 4 為例，式(10)式中的 $P(f_1)$ 是指第 1 條順向路徑增益，表示沿著甲先贏一小回合往前走，共有有串聯的兩個分枝，順向路徑增益為 $P(f_1) = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$，(10)式中的 $P(f_2)$ 是指第 2 條順向路徑增益，表示沿著甲先輸一小回合往前走，共有串聯的 3 個分枝，順向路徑增益為 $P(f_2) = \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{18}{125}$。$\Delta$ 定義如下：

$$\Delta = 1 - \sum L(1) + \sum L(2) - \sum L(3) + \cdots\cdots \tag{11}$$

其中 $\sum L(1)$ 表示獨立的迴路增益的總和，$\sum L(2)$ 表示兩兩不接觸的迴路增益乘積的總和，依此類推，有點像組合裡的排容原理。參考圖 4，由於只有一個迴路，所以 $\Delta = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{25}$。$\Delta_i$ 的定義與 Δ 相同，但是要先把碰觸到順向路徑 f_i 的迴路去掉，可以想像迴路是汽球，順向路徑是刺針，順向路徑碰到迴路，迴路就像爆開的汽球消失了，參考圖 4，由於兩條順向路徑都會碰到唯一的迴路，所以 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$，把這些結果代入(10)式得到

$$P(\text{甲贏}) = \frac{P(f_1)\Delta_1 + P(f_2)\Delta_2}{\Delta} = \frac{25}{19} \times (\frac{9}{25} + \frac{18}{125}) = \frac{63}{95} \tag{12}$$

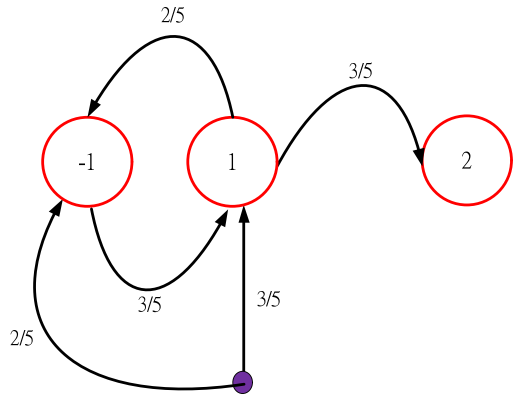

圖 4：梅生增益公式法對應的狀態圖

第六種作法稱作蒙地卡羅模擬法，它不是一般認知的數學解法，蒙地卡羅模擬是一種機率統計採用的技術，可預測不確定事件的可能結果。電腦程式語言使用 Matlab，此程式模擬甲乙兩人猜拳，甲獲勝的機率是多少。試驗次數設定為 100 萬次，模擬結果甲獲勝的機率是 0.6635，與 $\frac{63}{95}=0.6632$ 相比，誤差在小數點後第 4 位，誤差很小強烈表示 P(甲贏)=$\frac{63}{95}$ 是對的，程式寫法如圖 5 所示。

```
clear,  % 甲乙兩人猜拳

N=1000000;          % 試驗次數
s=0;                % s表示甲贏的次數
for k=1:N
    u=0; v=0;
    for m=1:10000
        x=randi(6);               % 隨機產生1~6的自然數
        if x > 3; u=u+1; v=0;
           if u == 2; s=s+1; break, end
        end
        if x < 3; v=v+1; u=0;
           if v == 2; break, end
        end
    end
end
P=s/N;    % P表示甲贏的機率

[P 63/95]     % [0.6635   0.6632]
```

圖 5：蒙地卡羅模擬甲乙兩人猜拳輸贏過程的結果

行文至此我們提出一個問題：如果題目的難度增加，採用哪些解題技巧比較合適？我們把題目改成如下：由於甲比較厲害，所以雙方約定甲先連續猜贏 3 個小回合才算獲勝，乙仍維持連續猜贏兩個小回合算獲勝，則甲獲勝的機率為何？

第一種解法為無窮級數法，稍微複雜，這裡就不再演算。理由是無窮級數法只適合分離的迴路，當一個迴路包含於另一個迴路或是兩個迴路互相接觸，兩個無窮級數會彼此糾纏，依靠人腦思考比較不容易列式計算。

第二種解法為解聯立方程式法，我們先畫出對應的狀態圖如圖 6 所示，假設甲贏二小回合後贏一大回合機率是 z，甲贏一小回合後贏一大回合機率是 y，甲輸一小回合後贏一大回合機率是 x，參考圖 6 可以列出關係式如下：

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}y + \dfrac{2}{5}\times 0 \\ y = \dfrac{3}{5}z + \dfrac{2}{5}x \\ z = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}\times 1 \end{cases} \tag{13}$$

解聯立方程式得 $x = \dfrac{27}{77}, y = \dfrac{45}{77}$，甲先連續猜贏三個小回合的機率計算如下：

$$P(\text{甲贏}) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{2}{5}\times\frac{27}{77} + \frac{3}{5}\times\frac{45}{77} = \frac{27}{55} \tag{14}$$

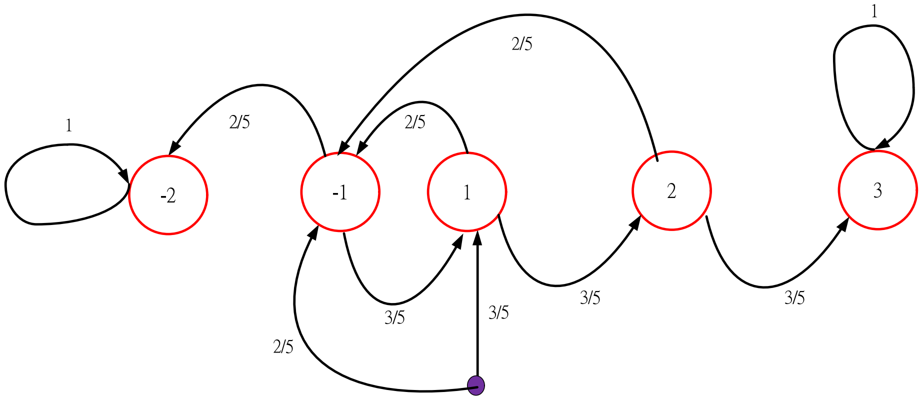

圖 6：描述甲乙兩人猜拳輸贏過程的狀態圖(甲先連續猜贏三個小回合才算贏)

第三種解法為馬可夫鏈轉移矩陣法，由於 Matlab 適合矩陣運算，因此底下的計算我們把它交給程式來做。設定觀察的狀態為 $S_1='-2'$，$S_2='3'$，$S_3='-1'$，$S_4='1'$ 及 $S_5='2'$，其中 $S_1='-2'$ 與 $S_2='3'$ 為吸收狀態，寫出左轉移矩陣如下：

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2/5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5\\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5\\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0\end{bmatrix} \tag{15}$$

其中 $M=\begin{bmatrix}0 & 2/5 & 2/5\\ 3/5 & 0 & 0\\ 0 & 3/5 & 0\end{bmatrix}$，$L=\begin{bmatrix}2/5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3/5\end{bmatrix}$， 計算 C 矩陣如下

$$C=L\cdot(I_3-M)^{-1}=\begin{bmatrix}50/77 & 32/77 & 20/77\\ 27/77 & 45/77 & 57/77\end{bmatrix} \tag{16}$$

上式中的 $C(2,1)=\dfrac{27}{77}$ 即是從狀態 $S_3='-1'$ 出發，最後到達吸收狀態 $S_2='2'$ 的機率，$C(2,2)=\dfrac{45}{77}$ 即是從狀態 $S_4='1'$ 出發最後到達吸收狀態 $S_2='2'$ 的機率，所以甲先連續猜贏三個小回合的機率計算如下：

$$P(\text{甲贏})=\frac{2}{5}\times\frac{27}{77}+\frac{3}{5}\times\frac{45}{77}=\frac{27}{55} \tag{17}$$

很明顯的，(17)式與(14)式有完全相同的結構。

第四種解法為狀態圖直接簡化法，當狀態圖趨向複雜時過程會相當冗長，因此不建議採用。為了證明此法仍然有效，並凸顯第五種解法的扼要精簡，我們還是寫出解題過程，把它分成兩個路徑來化簡，其中甲先輸第一小回合的路徑簡化過程如圖 7 所示，化簡的結

果在圖 7 左下角，利用串聯相乘的規則得到 $P_{-1}=\frac{2}{5}\times\frac{45}{77}\times\frac{3}{5}=\frac{54}{385}$ ，甲先贏第一小回合的路徑如簡化過程圖 8 所示，採用類似方法得到 $P_1=\frac{75}{77}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{77}$，利用並聯相加的規則，甲先連續猜贏三個小回合的機率計算如下：

$$P(\text{甲贏})=\frac{54}{385}+\frac{27}{77}=\frac{27}{55} \tag{18}$$

雖然不建議採用狀態圖直接簡化法，但是如果我們關心的是中間細微的過程，此法猶如庖丁解牛，中間一步一步的過程就像熟悉牛的每一處關節，有如莊子的一則寓言，《莊子.養生主》說的「彼節者有閒，而刀刃者無厚，以無厚入有閒，恢恢乎，其於遊刃必有餘地矣」。

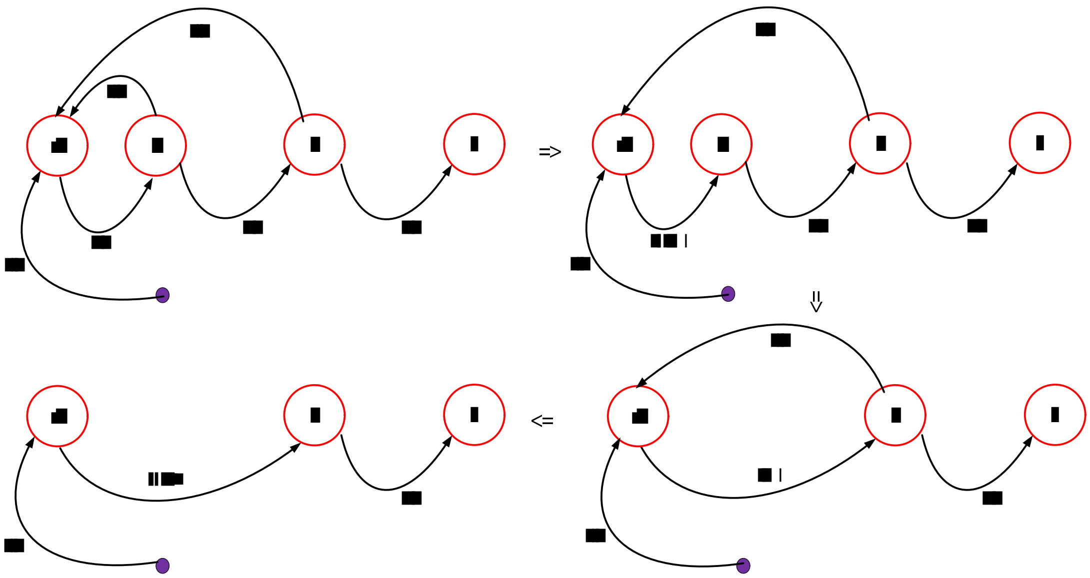

圖 7：甲先輸第一小回合之狀態圖簡化的過程

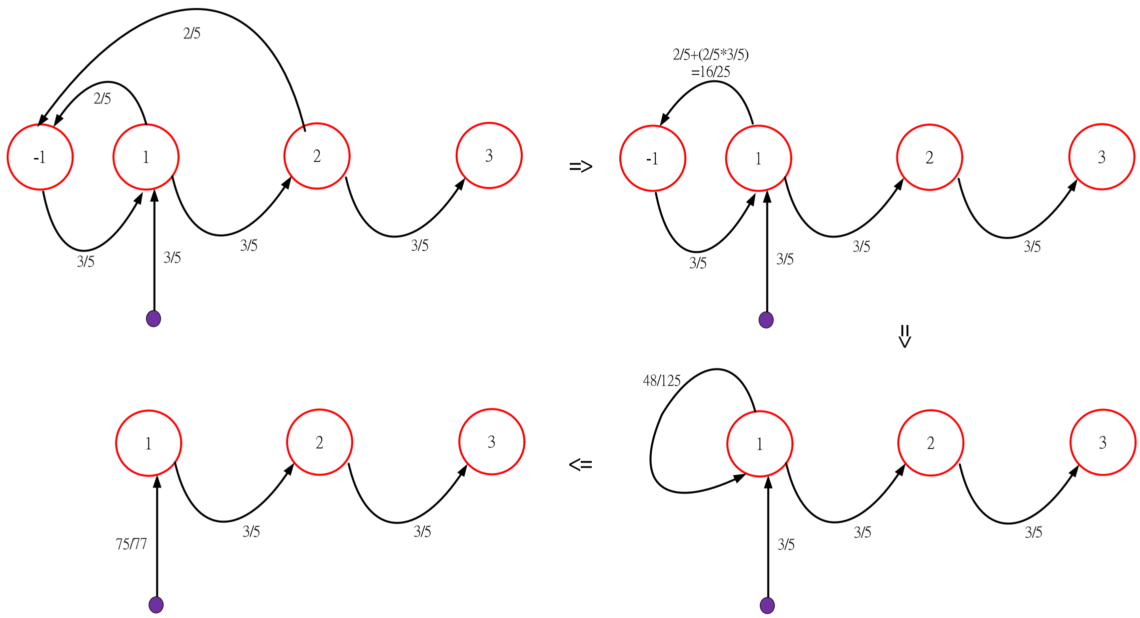

圖 8：甲先贏第一小回合之狀態圖簡化的過程

第五種解法為狀態圖之梅生增益公式法，參考圖 6 可以看到有兩條順向路徑通往最右邊的吸收狀態，$P(f_1)$是指第 1 條順向路徑增益，對應到甲先贏一小回合，此順向路徑有串聯的 3 個分枝，順向路徑增益為 $P(f_1)=(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$，$P(f_2)$是指第 2 條順向路徑增益，對應到甲先輸一小回合，有串聯的 4 個分枝，順向路徑增益為 $P(f_2)=\frac{2}{5}\times(\frac{3}{5})^3=\frac{54}{625}$。

圖(6)有兩個迴路(不包含吸收狀態的自我迴路)，第一個迴路增益 $L_1=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，第二個迴路增益 $L_2=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{18}{125}$，由於兩個迴路有接觸，所以 $L(2)=0$，代入公式 $\Delta=1-(L_1+L_2)=1-(\frac{6}{25}+\frac{18}{125})=\frac{77}{125}$。由於兩條順向路徑都會碰到兩個迴路，兩顆汽球(兩個迴路)皆爆掉，所以 $\Delta_1=\Delta_2=1$，把這些結果代入(10)式得到

$$P(\text{甲贏})=\frac{P(f_1)\Delta_1+P(f_2)\Delta_2}{\Delta}=\frac{125}{77}\times(\frac{27}{125}+\frac{54}{625})=\frac{27}{55} \qquad (19)$$

狀態圖之梅生增益公式法是作者寫此文最想推薦的技巧，很像禪宗表示徹悟境界之用語：「不立文字，直指人心」，即凝視著狀態圖，算出對應的參數，無須分析思慮即可直接解決問題。

行文至此，我們試著利用此法把通式作出來。假設一小回合甲獲勝的機率為 p，乙獲勝的機率為 q，雙方約定甲先連續猜贏 n 個小回合才算獲勝，乙先連續猜贏 2 個小回合才算獲勝，則甲獲勝的機率為何？

參考圖 6 並且擴充左右的狀態，左邊狀態從 –2 開始，右邊狀態到達 n。參考擴充的圖 6 可以看到有兩條順向路徑通往最右邊的吸收態，$P(f_1)$是指第 1 條順向路徑增益，對應到甲先贏一小回合，此順向路徑有串聯的 n 個分枝，順向路徑增益為 $P(f_1)=p^n$，$P(f_2)$是指第 2 條順向路徑增益，對應到甲先輸一小回合，有串聯的 n+1 個分枝，順向路徑增益為 $P(f_2)=qp^n$。有 $n-1$個迴路(不包含吸收狀態的自我迴路)，由左至右每個迴路增益分別是 $\{pq, p^2q, \cdots, p^{n-1}q\}$，由於不存在兩個未接觸的迴路，所以 $L(2)=0$，代入公式 $\Delta=1-(pq+p^2q+\cdots+p^{n-1}q)$。由於兩條順向路徑都會碰到 $n-1$個迴路，所有汽球皆爆掉，所以 $\Delta_1=\Delta_2=1$，把這些結果代入(10)式得到

$$P(\text{甲贏})=\frac{P(f_1)\Delta_1+P(f_2)\Delta_2}{\Delta}=\frac{(1+q)p^n}{1-(pq+p^2q+\cdots+p^{n-1}q)} \tag{20}$$

把 $p=\frac{3}{5}$，$q=\frac{2}{5}$，$m=2$，$n=3$代入(20)式得到

$$P(\text{甲贏})=\frac{(1+q)\times p^3}{1-(pq+p^2q)}=\frac{(1+\frac{2}{5})\times(\frac{3}{5})^3}{1-[\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times(\frac{3}{5})^2]}=\frac{27}{55} \tag{21}$$

此結果與(19)式相同。

第六種作法為蒙地卡羅模擬法，只要把圖 5 程式中一個數字 u == 2 改成 u == 3，模擬結果甲獲勝的機率是 0.4911，與 $\frac{27}{55}=0.4909$ 相比，誤差在小數點後第 4 位，誤差很小強烈表示 $P(\text{甲贏})=\frac{27}{55}$ 是對的，程式寫法如圖 9 所示。

```
clear,  % 甲乙兩人猜拳，甲連贏3次/乙連贏2次

N=1000000;          % 試驗次數
s=0;                % s表示甲贏的次數
for k=1:N
    u=0; v=0;
    for m=1:10000
        x=randi(6);             % 隨機產生1~6的自然數
        if x > 3; u=u+1; v=0;
            if u == 3; s=s+1; break, end
        end
        if x < 3; v=v+1; u=0;
            if v == 2; break, end
        end
    end
end
P=s/N;    % P表示甲贏的機率

[P 27/55]    % [0.4911 0.4909]
```

圖 9：蒙地卡羅模擬甲乙兩人猜拳輸贏過程的結果(甲先連續猜贏三個小回合才算贏)

最後做個結論，本文討論了兩個相關的機率題目，第一題適合高中數學前標的同學來做，若要應付考試，第一種無窮級數法與第二種聯立方程式法都值得學習。第二題算是第一題的進階題，適合高中數學競賽或是當成教甄考題。以第二題進階題來說，第一種無窮級數法不適合採用，第二種聯立方程式法只要能正確的按照題意畫出狀態圖，列出聯立方程式並求解即可。第三種馬可夫鏈轉移矩陣法，通常需配合矩陣運算，因此較適合手邊有現成的矩陣運算軟體，例如 Matlab。第四種狀態圖直接簡化法，對解題的內部結構有興趣的讀者可以試試看，體會每一個步驟的細微過程，可以更清楚此種解法的涵義。

第五種狀態圖之梅生增益公式法是作者想推薦的，熟練梅生增益公式可快速解決問題，尤其當有數個迴路互相糾纏時，梅生增益公式可以直指人心，快速破解。第六種並非正規的數學解法(蒙地卡羅模擬法)，主要是針對未知的題目提供正確答案的檢驗，如同上面的例子，執行 100 萬次的試驗，所花時間通常是幾秒鐘，對做高中數學科展的同學相當有幫助，最後希望本文的提出可以給參加比賽或做科展的高中生及高中數學老師當參考。

參考文獻

Childers, B. G. (1997) *Probability and Random Processes*. McGraw-Hill.

Misra, K. M. (2004). *Radio-Frequency and Microwave Communication Circuits* (2nd ed.). John Wiley & Sons .