空間中是否存在三平面其方程式聯立後滿足Δ=0 且Δx, Δy, Δz 恰有一個不為零？

連威翔

優食台灣股份有限公司

壹、前言

在高中數學學科中心第 102 期的電子報中，北一女中的楊宗穎老師撰寫了一篇名為《一個特殊聯立方程組的存在性問題》的文章(註 1)，請參考[1]。在[1]文中，作者以空間向量為工具，先介紹一些空間向量與三階行列式的相關性質作為預備知識，接著指出空間中三平面關係表現在「向量線性組合」上的意義，隨後也說明了克拉瑪公式中三平面關係的分類，最後透過一段詳細的推論與分析後，作者得到下述性質：

性質 1：由空間中三平面的方程式所構成之三元一次方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{1}$$

不可能滿足「$\Delta=0$ 且 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 恰有一個不為零」的條件，其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

筆者在拜讀[1]文過後，覺得性質 1 的結果很有意思，但覺得此性質應該有另外的證明方式。筆者花了一些時間試著找出對性質 1 的另證，雖然在過程中有找到一些線索，但最後卻發現無法完成證明。於是，便開始尋找性質 1 的反例，結果發現性質 1 確實存在反例，這也表示性質 1 不成立。接著，筆者回顧[1]文為了證明性質而寫下的推論過程，猜測作者應該是在推論過程中的某處用上了性質 1 的前提中並未列出的

$$(a_1,a_2,a_3),\ (b_1,b_2,b_3),\ (c_1,c_2,c_3)$$

均不為零向量的條件，所以才會在[1]文最後推得性質 1 成立。

為了確定上述想法的正確性，筆者便考慮在性質 1 的前提中加上

$$(a_1,a_2,a_3),\ (b_1,b_2,b_3),\ (c_1,c_2,c_3)$$

均不為零向量的條件，使其成為底下的性質 2：

性質 2：考慮由空間中三平面的方程式所構成之三元一次方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{2}$$

若已知 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$ 均不為零向量，則「$\Delta=0$ 且 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 恰有一個不為零」恆不成立，其中 $\Delta,\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 的定義如性質 1 所述。

有趣的是，在寫下了性質 2 之後，筆者發現自己最初為了寫下性質 1 之另證所列出的一些推論過程剛好可用來證明性質 2 成立。藉此寫下性質 2 的證明後，筆者心中就更加確信在[1]文推論過程中的某處應該用上了 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$ 均不為零向量的條件才能推得性質 1 成立。注意性質 1 與性質 2 的結論相同，兩者僅前提不同。

在底下第二節中，筆者將先介紹自己對性質 1 所找到的反例，藉此說明性質 1 不成立，接著則會介紹性質 2 的證明供讀者參考。在提出性質 2 的證明後，筆者也會試著說明[1]文的推論過程中究竟是在哪個關鍵點必須用上了 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$ 均不為零向量的條件，才能繼續推得性質 1 的結論成立。知道此關鍵點後，我們即可明白[1]文的推論雖然無法證明性質 1，但是卻可以證明性質 2。

要先提醒讀者的是，由於方程組(1)是由空間中三個平面的方程式所組成，因此用來表示三平面法向量的 $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)$ 均不為零向量，但是這並不表示

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

均不為零向量，請讀者注意。此外，請注意上面三個向量使用了直式的寫法，此寫法雖然與方程組(2)上方與下方對相同三向量所使用的橫式寫法不同，但兩種寫法基本上功能相同。上述直式向量的寫法也是[1]文作者在推論時所使用的寫法，底下筆者也會繼續使用。

貳、從性質 1 的反例談起

對於性質 1，筆者所找到的反例如下：

例 1：我們考慮底下由三個平面的方程式所構成的方程組

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}. \tag{3}$$

先刻意將上述方程組寫成三元一次方程組的形式

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 1y + 0z = 1, \\ 1x + 1y + 0z = 1 \end{cases} \tag{4}$$

利用方程組(4)寫下相應的行列式 $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$，由於這三個行列式其第三行的數字都是 0，因此有 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$，接著我們計算列出 Δ_z 並計算其值如下：

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

由於方程組(3)符合性質 1 的前提，且我們得到 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ 且 $\Delta_z \neq 0$ 的推論結果，因此方程組(3)具備「$\Delta = 0$ 且 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ 恰有一個不為零」的條件，但此與性質 1 的結論不符，故本例確實是性質 1 的一個反例。

<u>性質 2 的證明</u>：

透過上面對性質 1 所提出的反例，我們可確定性質 1 不成立。雖然如此，但筆者發現只要在性質 1 的前提中加上 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 均不為零向量的條件，即改考慮性質 2，則我們可證明性質 2 成立，且其中證明的關鍵就是[1]文前言所介紹的克拉瑪公式，該公式的內容如下：

1. 當 $\Delta \neq 0$ 時，方程組(1)有唯一解（三平面恰交於一點），如下：

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right).$$

2. 當 $\Delta=0$，且 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 不全為零時，方程組(1)無解（三平面沒有共同交點）。
3. 當 $\Delta=0$，且 $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ 時，方程組(1)無解或有無窮多解。

注意筆者對上述公式第 2 點與第 3 點所使用的敘述方式與[1]文略有不同，但本質上是相同的。此外在第 1 點當中，筆者加入了該情況的唯一解以 $\Delta,\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 寫下的表達式，相信學習過克拉瑪公式的讀者對此表達式應該都很熟悉。

藉由上述之克拉瑪公式，筆者找到了性質 2 的證明，證明過程如下：

證明：使用反證法，若方程組(1)所對應的四個行列式 $\Delta,\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 滿足「$\Delta=0$ 且 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 恰有一個不為零」的條件，則我們不妨先假設 $\Delta=\Delta_y=\Delta_z=0$ 且 $\Delta_x\neq 0$，此時將有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

且有

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

我們可利用行列式性質中「兩行交換其值變號」的性質，將(5)式改寫為等價的下式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & a_1 \\ d_2 & b_2 & a_2 \\ d_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

而透過(6), (7)兩式的搭配，我們知道底下的方程組有唯一解：

$$\begin{cases} d_1x+b_1y+c_1z=a_1 \\ d_2x+b_2y+c_2z=a_2 \\ d_3x+b_3y+c_3z=a_3 \end{cases}, \tag{8}$$

這是因為在方程組(8)中，若定義

$$\Delta'=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \ \Delta'_x=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \ \Delta'_y=\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \ \Delta'_z=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & a_1 \\ d_2 & b_2 & a_2 \\ d_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

則由(6),(7)兩式可知 $\Delta'\neq 0$ 且 $\Delta'_x=\Delta'_y=\Delta'_z=0$，此時利用本節開頭克拉瑪公式的第 1 點，即可先確定方程組(8)有唯一解，且此唯一解為

$$(x,y,z)=\left(\frac{\Delta_x{}'}{\Delta'},\frac{\Delta_y{}'}{\Delta'},\frac{\Delta_z{}'}{\Delta'}\right)=(0,0,0).$$

將上述方程組(8)的唯一解代入方程組(8)之後，可得 $a_1=a_2=a_3=0$，因此有

$$(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0),$$

注意上式與性質 2 前提中 (a_1,a_2,a_3) 不為零向量的條件矛盾，因此可知「$\Delta=\Delta_y=\Delta_z=0$ 且 $\Delta_x\neq 0$」的條件不成立。

另一方面，若在上一段討論的開頭處改以「$\Delta=\Delta_z=\Delta_x=0$ 且 $\Delta_y\neq 0$」或「$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ 且 $\Delta_z\neq 0$」的假設開始進行討論，則只要仿照上一段討論中「設計方程組(8)並使用克拉瑪公式第 1 點求解」的過程，同理分別可推得

$$(b_1,b_2,b_3)=(0,0,0),\qquad (c_1,c_2,c_3)=(0,0,0).$$

但以上兩推論結果均與性質 2 前提中 $(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$ 不為零向量的條件矛盾，因此可知「$\Delta=\Delta_z=\Delta_x=0$ 且 $\Delta_y\neq 0$」與「$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ 且 $\Delta_z\neq 0$」皆不可能成立。

透過以上兩段討論可知在性質 2 的前提下，上面我們所關心的「$\Delta=0$ 且 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 恰有一個不為零」這個條件恆不成立，因此性質 2 的結論成立，至此性質 2 證明完畢。此外，若將以上兩段討論所得的結果合起來，還可寫成底下的性質 3：

性質 3：考慮由空間中三平面的方程式所構成之三元一次方程組

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

則於性質 1 中所定義的行列式 $\Delta,\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 之值是否為 0 與向量

$$(a_1,a_2,a_3),\ (b_1,b_2,b_3),\ (c_1,c_2,c_3)$$

是否為零向量兩者之間的關係滿足：

(a) 若 $\Delta=\Delta_y=\Delta_z=0$ 且 $\Delta_x\neq 0$，則 (a_1,a_2,a_3) 為零向量；

(b) 若 $\Delta=\Delta_z=\Delta_x=0$ 且 $\Delta_y\neq 0$，則 (b_1,b_2,b_3) 為零向量；

(c) 若 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ 且 $\Delta_z \neq 0$，則 (c_1, c_2, c_3) 為零向量。

注意性質 3 結論中的(a),(b),(c)三種情況，會分別對應到原本空間中三平面與 yz 平面、zx 平面、xy 平面垂直的情況，這是因為三種情況中三平面的法向量分別與 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$ 垂直。而若將(a),(b),(c)三種情況對應到[1]文第 2 頁底部開始介紹的「三平面關係的分類」之中，則三平面相交的關係都是屬於[1]文第 3 頁上方圖 II 或圖 III 的情況，此事實時在[1]文第 3 頁下半也有提到。

對[1]文證明過程的探索：

接下來，我們不妨回頭仔細閱讀[1]文所提出的證明。在本文第一節中，筆者提到[1]文的推論過程應該有用上 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 均不為零向量的條件，才得以證明性質 1 成立，此處將予以詳細說明。注意在[1]文的推論過程中，作者先令

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\ \ \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

接著說明方程組

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{9}$$

可改寫為下述的向量等式：

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

此外也說明若方程組(9)無解，則不存在實數 x, y, z 滿足 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$，而此結果又等價於「$\vec{d}$ 無法寫成 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 之線性組合」的條件，以上這部分出自[1]文的推論筆者認為

都沒有問題，也都還不必用上 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ 即 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均不為零向量的條件。在[1]文中由上述討論所開展出的推論過程最後，作者透過兩段分別以「若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 兩兩不平行」與「若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 恰兩向量平行」起頭的討論，確定了 $\{\vec{d},\vec{b},\vec{c}\},\{\vec{a},\vec{d},\vec{c}\},\{\vec{a},\vec{b},\vec{d}\}$ 這三組向量集合中至少有兩組不共平面，因此得到「$\Delta_x\neq 0,\Delta_y\neq 0,\Delta_z\neq 0$ 至少兩式成立」的結論，筆者發現，就是在這最後一步必須加上 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 皆不為零向量的條件限制。試想，在最後一步若沒有「$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 皆不為零向量」的條件限制，則我們可將上面的方程組(4)套用在方程組(9)之中，得

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \ \vec{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

此時 $\{\vec{d},\vec{b},\vec{c}\},\{\vec{a},\vec{d},\vec{c}\},\{\vec{a},\vec{b},\vec{d}\}$ 這三組向量集合之中僅 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{d}\}$ 的三向量不共平面，而 $\{\vec{d},\vec{b},\vec{c}\},\{\vec{a},\vec{d},\vec{c}\}$ 這兩組都是三向量共平面的向量集，所以說，此時方程組(9)具備 $\Delta_x=\Delta_y=0,\Delta_z\neq 0$ 的條件。至此，我們知道若使用[1]文的討論方式看方程組(4)，則最後將無法得到[1]文所寫下的「$\Delta_x\neq 0,\Delta_y\neq 0,\Delta_z\neq 0$ 至少兩式成立」之結論。

有了上述認知後，我們知道只要加上$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$ 均不為零的限制條件，則[1]文的推論過程就不會有任何問題。而由於這個推論過程可推得性質 2 的結論，因此[1]文事實上是對性質 2 提出了一個正確的證明，讀者不妨藉由閱讀[1]文來理解並體會此事實。

參、性質 3 的推廣

見到前一節的性質 3 以及對性質 3 介紹的證明(列在性質 3 前面的兩段討論中)，相信不少讀者可能會和筆者一樣，會想到我們可以證明底下的性質：

性質 4：考慮超空間中由 n 個超平面的方程式所構成之 n 元一次方程組

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\qquad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases},\tag{10}$$

其中 $n \geq 2$，且每個方程式等號左側的係數皆不全為零。以上述方程式等號左邊的所有係數依出現之相對位置寫成的 n 階行列式，我們令

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

並將行列式 Δ 第 k 行的 $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ 替換為 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 後所得的行列式令為 Δ_k，其中 $1 \leq k \leq n$，即令

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

其中形如 b_i 的數都出現在第 k 行。且同時也定義

$$\overrightarrow{A_k}=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

則 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 之值是否為 0 與 $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_n}$ 是否為零向量之間的關係，將會滿足底下這段敘述：若 $\Delta=0$ 且在 n 個行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 中恰好只有 $\Delta_k \neq 0$，其餘 $n-1$ 個行列式之值皆為 0，其中 $1 \leq k \leq n$，則 $\overrightarrow{A_k}$ 為零向量。

注意性質 4 是將性質 3 推廣後所得的結果，對性質 4 設定 $n=3$ 即可得性質 3。性質 4 的證明如下：

證明：若 $\Delta=0$ 且在 n 個行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 之中恰好只有 $\Delta_k \neq 0$，其餘 $n-1$ 個行列式之值皆為 0，其中 $1 \leq k \leq n$，則考慮將方程組(10)中每個方程式 x_k 的係數與常數項交換位置(第 i 個方程式為 a_{ik} 與 b_i 交換)後所得的新方程組如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + b_1x_k + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1k} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + b_2x_k + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2k} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + b_nx_k + \cdots + a_{nn}x_n = a_{nk} \end{cases}. \tag{12}$$

以上述方程組之各方程式等號左邊的所有係數依出現之相對位置寫成的 n 階行列式，我們令其為 Δ'，則對照(11)式後可知有

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_k, \tag{13}$$

注意上式中形如 b_i 的數都出現在第 k 行。

以(13)式搭配性質 4 中 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 的定義與性質 4 最後設定之 $\Delta_k \neq 0$ 的條件，可知

$$\Delta' = \Delta_k \neq 0.$$

此外，若將(13)式中 Δ' 表達式之第 j 行的係數替換為

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

之後所得的行列式令為 $\Delta_j{}'$，其中 $1 \leq j \leq n$，則不難發現當 $j = k$ 時有

$$\Delta_j' = \Delta_k{}' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta = 0,$$

這是因為從 Δ' 得到 $\Delta_k{}'$ 所做的係數替換過程與從 Δ 得到 Δ' 所做的係數替換過程恰好相反；而若 $j \neq k$，搭配性質 4 的敘述中「$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 這 n 個行列式之中恰好只有 $\Delta_k \neq 0$，其餘 $n-1$ 個行列式之值皆為 0」的條件，則有

$$\Delta_j{}' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= -\Delta_j = 0,$$

其中，上式中的第一個行列式中形如 a_{ik}, b_i 的數分別落在第 j 行與第 k 行，而第二個行列式中形如 a_{ik}, b_i 的數分別落在第 k 行與第 j 行，注意上式的第二個等號用上了行列式「兩行交換其值變號」的性質，第三個等號則用上了方程組(10)其 Δ_j 的定義。因此對任意滿足 $1 \le j \le n$ 的正整數 j，我們有 $\Delta_j{}' = 0$。

至此，利用參考資料[2]中所介紹的克拉瑪公式，我們就可寫下：

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1{}'}{\Delta'}, \frac{\Delta_2{}'}{\Delta'}, \dots, \frac{\Delta_n{}'}{\Delta'}\right) = (0, 0, \dots, 0),$$

其中 $\Delta' \neq 0$。將上式的解代入方程組(12)，即可得到 $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}) = (0, 0, \dots, 0)$，因此有

$$\overrightarrow{A_k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $\overrightarrow{A_k}$ 確實為零向量，至此性質 4 證明完畢。

肆、結語

本文寫作的緣起，是因為想試著對第一節出自[1]文的性質 1 寫下其另證，但在發現無法完成另證之後，便轉而找尋性質 1 的反例。而在順利找到反例後，筆者的想法便轉變為想找出[1]文證明過程中可能需要補充的地方，畢竟此時已確定性質 1 不成立。經研究過後，筆者順利證明了藉由在性質 1 前提中加上 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均不為零向量之條件所得的性質 2 ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的定義請參考方程組(9)上方)，至此我們的心中也可大約明白[1]文的探討過程其實是在證明性質 2，而非性質 1。

而值得一提的是，在[1]文最後作者提出如下問題：「在教學現場上，身為教師的我們，如果再次詢問學生，滿足 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ 且 $\Delta_z \neq 0$ 的聯立方程組是否有解？我們仍該期待

學生回覆的答案是『無解』嗎？」關於此問題，透過本文所介紹的內容，我們知道空間中確實存在三平面其方程式聯立後所組成的方程組滿足 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0,\Delta_z\neq 0$ 的例子，且此時方程組無解，在第二節一開始所介紹的方程組(3)即為一例。但如果修改前提，在前提中加入 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三向量均不為零的條件，則不存在這樣的方程組，當然也就不必談它有解或無解了。

至於本文標題所提出的疑問，只要我們回顧第二節的性質 3，即可明白其答案是肯定的。本文最後，筆者要特別感謝[1]文的作者，若沒有他所寫出的精采文章發表在先，相信筆者也不會有機會寫下本文。

註 1：在維基百科「聯立方程式」條目的內容中提到「聯立方程式」又稱為「方程組」，但這兩種說法皆有別於[1]文標題所使用的「聯立方程組」。在本文中，筆者是使用「方程組」的說法。

參考文獻

楊宗穎(2015)。一個特殊聯立方程組的存在性問題。**高中數學學科中心電子報，102。**
聯立方程式(2025)。維基百科條目。
Cramer’s rule(2026).Wikipedia.