

2025 TRML 思考賽試題探究與回饋

朱亮儒

國立臺灣師範大學數學系退休教授

壹、前言

臺灣高中數學競賽 (TRML) 是全球規模最大的數學團隊競賽活動之一，它是一個針對國內高中在學學生所設計的競賽，每年有 200 多隊、超過 3500 人參賽。TRML 起源於 1975 年開始的美國高中數學聯盟 (ARML) 所主辦的全美高中數學競賽模式，該競賽由財團法人九九文教基金會主辦，固定在每年八月的第三週 (星期六與星期日) 兩天分台北、台中、高雄三考區同時舉行。參賽隊伍每隊由 15 人自由組隊報名，競賽共分成團體賽 (Team Round)、思考賽 (Power Question)、個人賽 (Individual Question) 與接力賽 (Relay Round) 四個項目；其中思考賽試題可評測學生的閱讀、歸納、推理及論證的能力，是競賽項目中最具挑戰性及推廣與探究的項目，共 10 道計算證明題，滿分 60 分，由隊員分工合作在固定的時間內，互相討論、發揮潛力、充分利用每位隊員的專長，討論出一份最終的答案卷，為團隊爭取榮譽。由於少子化問題日趨嚴重，為能強化共同討論的團隊精神及效益，自 2026 年起 TRML 的組隊方式將變革為「每隊人數由 15 人減為 9 人」，思考賽試題數仍維持 10 道計算證明題，滿分為 60 分。歷年來此競賽已普遍獲得大家的認同，同時培育出許多臺灣參加國際數學奧林匹亞(IMO)的國手，也確實帶動了國內學習數學的風氣，進而開發學生數學潛能發展，達到推廣中學生數學教育的目的。2025 年 TRML 已進入第 27 屆，歷年來參與競賽的老師及同學已超過十萬人次，目前任職各大學的教授與高中老師有很多曾是 TRML 的參賽隊員，希望本文的探討能使團隊合作解決問題的方式在未來數學的教學上能建立另一種學習的模式。有志參加數學競賽或檢定的中學生，可參訪相關的網頁[1,2,3,4]。

本作品的核心目標包含以下兩個研究主軸：

- (1) 針對今年思考賽試題(參見附錄)，提出完整的理論基礎與解析。
- (2) 探索加深加廣的延伸問題。

貳、思考賽試題的理論基礎與解析

以下是黑色與白色棋子的一種變換遊戲：將任意 n 個黑色與白色棋子隨意由左而右排成一列，每次選取其中一個棋子，依以下規則操作：

- (i) 若選到第 1 個棋子，則將它換成與第 2 個棋子同色的棋子，其餘各棋子的顏色不變；
- (ii) 若選到中間棋子，則當其前後相鄰的棋子同色時，將它換成黑色棋子；而當其前後相鄰的棋子不同色時，將它換成白色棋子；其餘各棋子的顏色不變；
- (iii) 若選到第 n 個棋子，則將它換成與第 $n-1$ 個棋子同色的棋子，其餘各棋子的顏色不變。

這樣的變換稱為一次操作。遊戲的目標是要確認「一共可以用多少個黑色與白色的棋子，不論它們的比例如何，我們都可以在有限多次的操作後，將所有的棋子都換成黑色。」若改以數學語言來描述，以 0 代表黑色棋子，1 代表白色棋子，此時遊戲的操作規則如下：

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是由 0 與 1 組成的 n 項二元數列，其中 $n \geq 2$ 。每次隨意選取其中一項，依以下規則操作：

- (i) 若選到第 1 項，則將第 1 項換成 a_2 的值，其餘各項不變；
- (ii) 若選到第 k 項 ($2 \leq k \leq n-1$)，則將第 k 項換成 $a_{k-1} + a_{k+1}$ 之和再除以 2 的餘數，其餘各項不變；
- (iii) 若選到第 n 項，則將第 n 項換成 a_{n-1} 的值，其餘各項不變。

我們稱這樣的變換為一次操作。例如：數列 0,1,1,0,1 經過 5 次操作後可變成各項均為 0 的數列 0,0,0,0,0，如下所示：

$$\overline{0}, 1, 1, 0, 1 \xrightarrow{1} \overline{1}, 1, 1, 0, 1 \xrightarrow{2} \overline{1}, 0, 1, 0, 1 \xrightarrow{3} 0, 0, \overline{1}, 0, 1 \xrightarrow{4} 0, 0, 0, 0, \overline{1} \xrightarrow{5} 0, 0, 0, 0, 0$$

這種經過有限次的操作後可變成各項均為 0 的數列稱為好數列。但如 5 項的二元數列 1,1,0,1,1 就不是好數列，因為每次操作後數列都不變，故無法經過有限次的操作後變成各項均為 0 的數列。

為了符號方便，我們定義同餘符號「 $n \equiv r \pmod{3}$ 」表示 n 與 r 除以 3 有相同的餘數，亦即 $n-r$ 是 3 的倍數。例如：11 與 5 除以 3 的餘數都是 2，因此，可用 $11 \equiv 5 \pmod{3}$ 表示，且有 $11 \equiv 2 \pmod{3}$ 及 $5 \equiv 2 \pmod{3}$ 。

很顯然，型如：1,1,0,1,1,0, ..., 1,1,0,1,1 的 $3k+2$ 項二元數列都不是好數列，因為每次操作後都不變，故無法經過有限次的操作後變成各項均為 0 的數列。因此，當 $n \equiv 2 \pmod{3}$

時，在 n 項的二元數列中，至少有一種不是好數列。請注意：選擇不當的操作策略有可能會陷入死路的窘境，而誤以為不是好數列，例如：

$$1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1} \xrightarrow{1} 1, 1, 0, 1, 1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1} \xrightarrow{2} 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1。$$

但實際上此二元數列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ 是好數列，我們可以操作如下：

$$\begin{aligned} & 1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \dots, 1 \xrightarrow{1} 1, 0, 1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1} \xrightarrow{2} 1, 0, 1, 0, 1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1} \xrightarrow{3} \bar{1}, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1 \\ & \xrightarrow{4} 0, 0, \bar{1}, 0, 1, 0, 1, 1 \xrightarrow{5} 0, 0, 0, 0, \bar{1}, 0, 1, 1 \xrightarrow{6} 0, 0, 0, 0, 0, \bar{1}, 1, 1 \xrightarrow{7} 0, 0, 0, 0, 0, 1, \bar{1}, 1 \\ & \xrightarrow{8} 0, 0, 0, 0, 0, \bar{1}, 0, 1 \xrightarrow{9} 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{1} \xrightarrow{10} 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{aligned}$$

為了後續證明的方便起見，我們提出以下關鍵的性質 P：

性質 P： 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是由 0 與 1 組成的 n 項二元數列。

- (1) 若 $a_1 = 0$ 或 $a_n = 0$ ，則二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。
- (2) 若有某一個 i 使得連續 2 項 $a_i, a_{i+1} = 0, 0$ 或連續 3 項 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2} = 0, 1, 0$ 或 $1, 1, 1$ ，則二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。

證： (1) 不失一般性，可設 $a_1 = 0$ 。（註：依對稱性，證明 $a_n = 0$ 的情況亦同）

當 $n = 1$ 時，僅有一種二元數列 0 ；當 $n = 2$ 時，共有兩種可能的二元數列 $0, 0$

及 $0, \bar{1} \xrightarrow{1} 0, 0$ ；它們都是好數列。

假設 $n = k$ 時，以 0 為首的 k 項二元數列都是好數列。當 $n = k + 1$ 時，對任意 $k + 1$ 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ ，其中 $a_1 = 0$ ，分兩類討論如下：

- (a) 若 $a_2 = 0$ ，則由數學歸納法的假設，末 k 項的數列 a_2, a_3, \dots, a_{k+1} 是好數列。又因 $a_1 = 0$ ，二元數列 a_2, a_3, \dots, a_{k+1} 可獨立操作成各項均為 0 的數列。故在 $a_2 = 0$ 的情況下，此種 $k + 1$ 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ 都是好數列。
- (b) 若 $a_2 = 1$ ，則首 3 項 a_1, a_2, a_3 有兩種可能： $0, 1, 0$ 及 $0, 1, 1$ ，它們都可操作成首 2 項為 $0, 0$ ：

$$0, \bar{1}, 0 \xrightarrow{1} 0, 0, 0$$

$$\bar{0}, 1, 1 \xrightarrow{1} 1, \bar{1}, 1 \xrightarrow{2} \bar{1}, 0, 1 \xrightarrow{3} 0, 0, \bar{1} \xrightarrow{4} 0, 0, 0$$

因此，由(a)可知：此種 $k+1$ 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ 也都是好數列。

故由數學歸納法可得：以 0 為首的 n 項二元數列都是好數列。

(2) (a) 若 $a_i, a_{i+1} = 0, 0$ ，則由(1)可知：數列 $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ 都是好數列。又因 $a_i = 0$ ，數

列 $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ 可獨立操作成各項均為 0 的數列。此時末項 a_n 變成 0，再由(1)

可知：此種二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。

(b) 若 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2} = 0, 1, 0$ ，則可操作前 2 項成為 $0, 0$ 的數列：

$$0, \bar{1}, 0 \xrightarrow{1} 0, 0, 0 ;$$

因此，由(a)可知：此種二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。

(c) 若 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2} = 1, 1, 1$ ，分三類討論如下：

(i) 當 $i=1$ 時，可操作 $1, \bar{1}, 1 \xrightarrow{1} \bar{1}, 0, 1 \xrightarrow{2} 0, 0, 1$ ；因此，由(a)可知：此種二元數

列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。

(ii) 當 $i=2$ 時，首 4 項有 2 種可能： $0, 1, 1, 1$ 及 $1, 1, 1, 1$ ，它們都可操作成首項為 0 的數列如下：

$$0, 1, 1, 1$$

$$1, \bar{1}, 1, 1 \xrightarrow{1} \bar{1}, 0, 1, 1 \xrightarrow{2} 0, 0, 1, 1 ;$$

因此，由**性質 P**可知：此種二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。

(iii) 當 $i \geq 3$ 時，首 $i+2$ 項有 4 類：

$$\dots, 0, 0, 1, 1, 1, \dots, 0, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, 1, 1 \text{ 及 } \dots, 1, 1, 1, 1, 1,$$

它們都可操作成有連續 2 項為 $0, 0$ 的數列，如下：

$$\dots, 0, 0, 1, 1, 1$$

$$\dots, 0, 1, \bar{1}, 1, 1 \xrightarrow{1} \dots, 0, \bar{1}, 0, 1, 1 \xrightarrow{2} \dots, 0, 0, 0, 1, 1$$

$$\dots, 1, 0, 1, \bar{1}, 1 \xrightarrow{1} \dots, 1, 0, \bar{1}, 0, 1 \xrightarrow{2} \dots, 1, 0, 0, 0, 1$$

$$\dots, 1, \bar{1}, 1, 1, 1 \xrightarrow{1} \dots, 1, 0, 1, \bar{1}, 1 \xrightarrow{2} \dots, 1, 0, \bar{1}, 0, 1 \xrightarrow{3} \dots, 1, 0, 0, 0, 1$$

因此，由(a)可知：此種二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是好數列。

定理 1：若 $n \equiv 0 \pmod{3}$ ，且 $n \geq 3$ ，則每一種 n 項的二元數列都是好數列。

證：令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為任意的 n 項二元數列。

- (a) 當 $a_2 = 0$ 時，先操作 a_1 ，使第一項 a_1 變成 0；此時首項為 0，再由**性質 P**得知：此種 n 項的二元數列都是好數列。
- (b) 當 $a_2 = 1$ 時，分成以兩情況討論：
- (i) 當 $a_1 + a_3 = 0$ 時，可先操作 a_2 ，使得 a_2 項變成 0，再由(a)得知：此種 n 項的二元數列都是好數列。
- (ii) 當 $a_1 + a_3 = 1$ 時，若 $a_1 = 0$ 且 $a_3 = 1$ ，則首項為 0，由**性質 P**得知：此種 n 項的二元數列都是好數列。若 $a_1 = 1$ 且 $a_3 = 0$ ，則首 3 項為 1,1,0。由**性質 P**可知：當數列中出現 0 後再接 0，或出現 0,1 後再接 0，或出現 1,1 後再接 1，則二元數列都會是好數列。因此，僅需要考慮 1,1,0 之後接的仍為 1,1,0，每 3 項循環，此時 n 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為以下的情況：

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 0 \quad \text{。 (註： } n \equiv 0 \pmod{3}\text{)}$$

此時，末項 $a_n = 0$ ，再由**性質 P**得知：此種 n 項的二元數列都是好數列。

定理 2：若 $n \equiv 1 \pmod{3}$ ，且 $n \geq 4$ ，則每一種 n 項的二元數列都是好數列。

證：令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為任意的 n 項二元數列。

- (a) 當 $a_1 = 0$ 時，由**性質 P**可知：此種 n 項的二元數列都是好數列。
- (b) 當 $a_1 = 1$ 時，分成以兩情況討論：
- (i) 當 $a_2 = 0$ 時，可先操作 a_1 ，使得首項 a_1 項變成 0，再由**性質 P**得知：此種 n 項的二元數列都是好數列。
- (ii) 當 $a_2 = 1$ 時，若 $a_3 = 1$ ，則首 3 項為 1,1,1；由**性質 P**可知：此種 n 項的二元數列都是好數列。若 $a_3 = 0$ ，則首 3 項為 1,1,0。仿照**定理 1**的討論，我們僅需要考慮 1,1,0 之後接的仍為 1,1,0，每 3 項循環，此時 n 項的二元數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為以下的情況：

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 0, a_n \quad \text{。 (註： } n \equiv 1 \pmod{3}\text{)}$$

此時，不論 $a_n = 0$ 或 1，都可先操作末項 a_n ，使 a_n 項變成 0，即末項為 0；再由**性質 P**得知：此種 n 項的二元數列都是好數列。

從以上的討論，我們知道：當 $n = 3k \geq 3$ 或 $n = 3k + 1 \geq 4$ 時，「每一種 n 項的二元數列都是好數列」；而當 $n = 2$ 或 $3k + 2 \geq 5$ 時，「都會有一種 n 項的二元數列，但它不是好數列」。由此，我們可以推得以下的主要結果：

定理 3：若正整數 $n \geq 2$ ，則每一種 n 項的二元數列都是好數列之充要條件為 $n \geq 3$ ，且 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 。

證：(必要性) 當 $n = 2$ ，或 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 時，型如：1,1,0,1,1,0,⋯,11,0,1,1 的 n 項二元數列都不是好數列。因此， $n \geq 3$ ，且 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 。

(充分性) 由定理 1 及定理 2 得知：當 $n \geq 3$ ，且 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 時，每一種 n 項的二元數列都是好數列。

推論：若正整數 $n \geq 2$ ，則在 n 項的二元數列中，都存在一種不是好數列的充要條件為 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 。更進一步，此種不是好數列的 n 項二元數列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 是唯一的，其中

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{當 } k \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{當 } k \equiv 2 \pmod{3} \\ 0, & \text{當 } k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n。$$

證：由定理 3，僅需要證明唯一性，當 $n = 2$ 時，僅有一種不是好數列 1,1；而當 $n = 3k + 2 \geq 5$ 時， n 項的二元數列 1,1,0,1,1,0,⋯,11,0,1,1 (每 3 項 1,1,0 循環) 每次操作後數列都不變，故此種數列不是好數列。因此，我們僅須再證明不是好數列的僅有上述唯一的一種。

設 n 項二元數列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 不是好數列。由性質 P 知道：首項 $b_1 = 1$ ，且當數列中出現 0 後不能再接 0，出現 0,1 後不能再接 0，且出現 1,1 後不能再接 1。首先，觀察首 3 項的可能情形，不難發現僅有 2 種可能的數列：1,0,1 及 1,1,0。仿定理 1 進一步分析，接下來的 3 項，1,0,1 之後接的仍為 1,0,1，而 1,1,0 之後接的仍為 1,1,0，每 3 項循環。故此種數列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 僅有以下兩種可能：

$$1,0,1,1,0,1, \dots, 1,0,1,1, b_n \quad \text{及} \quad 1,1,0,1,1,0, \dots, 1,1,0,1, b_n。 \quad (\text{註：} n \equiv 2 \pmod{3})$$

又末項 b_n 也不能為 0，故 $b_n = 1$ ；此時，第一種數列：1,0,1,1,0,1,⋯,1,0,1,1,1 有出現末 3 項為 1,1,1，由性質 P 得知：此數列顯然是好數列；而第二種數列：

1,1,0,1,1,0, ⋯, 1,1,0,1,1 就是唯一的不是好數列。

參、探索思考賽加深加廣問題與回饋

前面探討的是將 n 項的二元數列排成一直線的情況(直線數列)，我們得到：當 $n \geq 3$ ，且 $n \equiv 0$ 或 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 時，每一種 n 項的二元直線數列都是好數列。以下，我們提出一個延伸問題：「將 n 項的二元數列依順時針方向排成一圓形(環狀數列)，每次任意選取其中一項，並將它換成其前後相鄰項之和再除以 2 的餘數」。若經過有限次的操作後可變成各項均為 0 的數列，則稱為優數列。顯然，當 $n = 3$ 時，存在一種 3 項的二元環狀數列，但它不是優數列，例如： $1, 1, 0$ 。而當 $n = 4, 5$ 時，經過實際的操作，可以發現任意 4 項或 5 項的二元環狀數列都是優數列。又當 $n = 6$ 時，存在一種 6 項的環狀數列，但它不是優數列，例如： $1, 1, 0, 1, 1, 0$ 。

一般而言，當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 且 $n \geq 3$ 時，型如： $1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 0$ 的環狀數列都不是優數列。至於「 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 且 $n \geq 4$ 」或「 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $n \geq 5$ 」時，是否任意 n 項的二元環狀數列都是優數列？此答案是肯定的，說明如下：

定理 4：若 $n \equiv 1 \pmod{3}$ ，且 $n \geq 4$ ，則每一種 n 項的二元環狀數列都是優數列。

證：令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為任意的 n 項二元環狀數列。

- (a) 當 $a_1 = 0$ 時，因為 $n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ ，可由**定理 1** 得知：末 $n - 1$ 項的二元數列 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 必為好數列，它有一種有限多次的直線操作後，可變成各項均為 0。又 $a_1 = 0$ ，上述直線數列的操作方式(不操作 a_1 項)作用在環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 上，恰可使此環狀數列的各項均變成 0。故在 $a_1 = 0$ 的情況下，此種 n 項的二元環狀數列都是優數列。
- (b) 當 $a_1 = 1$ 時，分成以兩情況討論：
- (1) 若 $a_2 + a_n = 0$ ，則可先操作 a_1 ，使得 a_1 項變成 0，再由(a)得知：此種 n 項二元環狀數列都是優數列。
 - (2) 若 $a_2 + a_n = 1$ ，不失一般性，可設 $a_2 = 0$ 且 $a_n = 1$ 。此時，由(a)，二元環狀數列 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_1$ 是優數列。又 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_1$ 與 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是相同的環狀數列，故環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 也是優數列。

定理 5：若 $n \equiv 2 \pmod{3}$ ，且 $n \geq 5$ ，則每一種 n 項的二元環狀數列都是優數列。

證：令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為任意的 n 項二元環狀數列。

- (a) 當 $a_1 = 0$ 時，因為 $n - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ ，可由**定理 2**得知：末 $n - 1$ 項的二元數列 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 必為好數列，它有一種有限多次的直線操作後，可變成各項均為 0。又 $a_1 = 0$ ，上述直線數列的操作方式(不操作 a_1 項)作用在環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 上，恰可使此環狀數列的各項均變成 0。故在 $a_1 = 0$ 的情況下，此種 n 項的二元環狀數列都是優數列。
- (b) 當 $a_1 = 1$ 時，分成以兩情況討論：
- (1) 當 $a_2 + a_n = 0$ 時，可先操作 a_1 ，使得 a_1 項變成 0，再由(a)得知：此種 n 項的二元環狀數列都是優數列。
- (2) 當 $a_2 + a_n = 1$ 時，不失一般性，可設 $a_2 = 0$ 且 $a_n = 1$ ，此時，由(a)，二元環狀數列 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_1$ 是優數列。又 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_1$ 與 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是相同的環狀數列，故環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 也是優數列。

定理 6：若正整數 $n \geq 3$ ，則每一種 n 項的二元環狀數列都是優數列之充要條件為 $n \geq 4$ ，且 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 。

證：(必要性) 顯然，當 $n = 3$ 時，二元環狀數列 1,1,0 不是優數列，故 $n \geq 4$ 。當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時，型如：1,1,0,1,1,0, ..., 1,1,0 (每 3 項 1,1,0 循環) 的環狀數列都不是優數列。因此， $n \geq 4$ ，且 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 。

(充分性) 由**定理 4** 及**定理 5** 得知：當 $n \geq 4$ ，且 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 時，每一個 n 項的二元環狀數列都是優數列。

接著，我們先推導類似性質 **P** 的一個關鍵性質，如下：

性質 Q：設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是由 0 與 1 組成的 n 項二元環狀數列。若有某一個 i 使得連續 2 項 $a_i, a_{i+1} = 0, 0$ 或連續 3 項 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2} = 0, 1, 0$ 或 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2} = 1, 1, 1$ ，則環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是優數列。

證：因為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是環狀數列，不失一般性，可設 $i = 1$ 。

- (a) 若 $a_1, a_2 = 0, 0$ ，則由**性質 P** 可知：直線數列 a_2, a_3, \dots, a_n 都是好數列。又因 $a_1 = 0$ ，直線數列 a_2, a_3, \dots, a_n 可獨立操作成各項均為 0 的數列(不操作 a_1 項)，故此種環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是優數列。

(b) 若 $a_1, a_2, a_3 = 0, 1, 0$ ，則可操作成有 2 項為 $0, 0$ 的數列： $0, \bar{1}, 0 \xrightarrow{1} 0, 0, 0$ ；因此，

由(a)可知：此種環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是優數列。

(c) 若 $a_1, a_2, a_3 = 1, 1, 1$ ，考慮接下來 2 項 a_4, a_5 的 4 種情況，分別操作如下：

(i) $1, 1, 1, 0, 0$ ；由(a)可知：此種環狀數列 a_1, a_2, \dots, a_n 都是優數列。

(ii) $1, \bar{1}, 1, 0, 1 \xrightarrow{1} 1, 0, 1, 0, 1$ ；因此，由(b)可知：此種環狀數列 a_1, a_2, \dots, a_n 都是優數列。

(iii) $1, 1, \bar{1}, 1, 0 \xrightarrow{1} 1, 1, 0, 1, 0$ ；因此，由(b)可知：此種環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是優數列。

(iv) $1, \bar{1}, 1, 1, 1 \xrightarrow{1} 1, 0, 1, \bar{1}, 1 \xrightarrow{2} 1, 0, 1, 0, 1$ ；因此，由(b)可知：此種環狀數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是優數列。

最後，我們要利用性質 Q 來證明不是優數列的環狀數列僅有一種排法。

推論：若正整數 $n \geq 3$ ，則在 n 項的二元環狀數列中，都存在一種不是優數列的充要條件為 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 。更進一步，此種不是優數列的 n 項二元環狀數列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 是唯一的，其中

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{當 } k \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & \text{當 } k \equiv 2 \pmod{3} \\ 0, & \text{當 } k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n。$$

證：由**定理 6**，我們僅需要證明唯一性。設 $n \equiv 0 \pmod{3}$ ，且設環狀數列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 不是優數列。此時，利用**性質 Q** 可得： $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 不能全為 0，不失一般性，可設 $b_1 = 1$ 。由**性質 Q** 可知：數列中不能出現 $0, 0$ 或 $0, 1, 0$ 或 $1, 1, 1$ ；因此，由 $b_1 = 1$ 開始，依順時針方向，出現 0 後不能再接 0，出現 $0, 1$ 後不能再接 0，出現 $1, 1$ 後不能再接 1。由此可推得：由 $b_1 = 1$ 開始，首 3 項僅有兩種可能的情形： $1, 0, 1$ 及 $1, 1, 0$ 。進一步分析，接下來的 3 項， $1, 0, 1$ 之後接的仍為 $1, 0, 1$ ，而 $1, 1, 0$ 之後接的仍為 $1, 1, 0$ ，每 3 項就循環。又 $n = 3k \geq 6$ ，故可得環狀數列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 僅有以下 2 種可能：

$1,0,1,1,0,1,1,0,1,\dots,1,0,1$ 及 $1,1,0,1,1,0,1,1,0,\dots,1,1,0$ 。(註： $n \equiv 0 \pmod{3}$)

又上述 2 種數列代表同一種環狀數列，且都不是優數列，因此，不是優數列恰有一種，即 $1,1,0,1,1,0,\dots,1,1,0$ (每 3 項 $1,1,0$ 循環)。

肆、結語

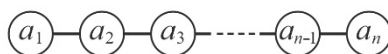
本作品所探討的是將 n 個黑色與白色的棋子依序排成一列的情況(直線排列)，發現當 $n \geq 3$ ，且 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 時，每一種 n 項的二元直線數列都是好數列。而當 n 個黑色與白色的棋子依序排成一圓形時(環狀排列)，我們得到：當 $n \geq 4$ ，且 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 或 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 時，每一種 n 項的二元環狀數列都是優數列。有興趣的讀者不妨探討一般

性的遊戲規則，例如：圖論中，圖形上每一個頂點賦與 0 或 1 的值，而成為二元圖形，每次操作改成選擇其中一頂點，並將該頂點上的數換成所有相鄰頂點上的數之和再除以 2 的餘數；甚至可推廣到更有挑戰性由 0,1,2 排成的三元數列。讀者不妨花點心思去探討與研究 [4,5,6,7,8,9]，看看其一般性會出現怎麼樣驚豔的變化。

伍、附錄 (2025 TRML 思考賽試題 --- 二元數列的變換問題)

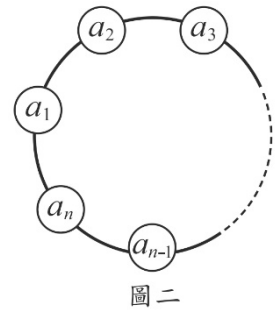
思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

如圖一，在 n 個點的路徑圖中，對每一 $i = 1, 2, \dots, n$ ，第 i 點標示一個 0 或 1 的數 a_i ，稱為一個直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 。如圖二，在 n 個點的迴圈圖中，對每一 $i = 1, 2, \dots, n$ ，將第 i 點標示一個 0 或 1 的數 a_i ，稱為一個環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ ，其首尾兩個字元視為相鄰，所以等同寫為 $a_2 a_3 \cdots a_n a_1$ 或 $a_3 a_4 \cdots a_n a_1 a_2$ 等表示法。



圖一

在一個直線/環狀數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中，將某一點的值 a_i 換成此點所有相鄰點的值之和，其他各點的值不變，我們稱這樣的變換為二次操作；其中的加法的運算規則為： $1+1=0+0=0$ 而 $1+0=0+1=1$ 。例如：圖一中若選取 a_1 而 $n \geq 2$ ，則將其換成 a_2 ；若選取 a_2 而 $n \geq 3$ ，則將其換成 $a_1 + a_3$ ；若選取 a_n 而 $n \geq 2$ ，則將其換成 a_{n-1} 。圖二中若選取 a_1 而 $n \geq 3$ ，則將其換成 $a_n + a_2$ 。



圖二

直線數串 11111 經過 5 次操作後，可變成各字元均為 0 的直線數串 00000，如下所示：

$$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1} \xrightarrow{1} \bar{1}0\bar{1}\bar{1}\bar{1} \xrightarrow{2} \bar{1}0\bar{1}0\bar{1} \xrightarrow{3} 00\bar{1}0\bar{1} \xrightarrow{4} 0000\bar{1} \xrightarrow{5} 00000。$$

這種經過某種有限次的操作後，可變成各字元均為 0 的數串稱為好數串。同樣的，環狀數串 11111 經過 7 次操作後，也可變成各字元均為 0 的數串，如下所示：

$$\begin{aligned} \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1} &\xrightarrow{1} \bar{1}0\bar{1}\bar{1}\bar{1} \xrightarrow{2} \bar{1}0\bar{1}0\bar{1} \xrightarrow{3} \bar{1}000\bar{1} \xrightarrow{4} \bar{1}\bar{1}00\bar{1} \\ &\xrightarrow{5} 0\bar{1}00\bar{1} \xrightarrow{6} 0000\bar{1} \xrightarrow{7} 00000 \end{aligned}$$

所以，環狀數串 11111 也是好數串。但 5 字元的直線數串 11011 就不是一個好數串，因為每次操作後數串都不變，故無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串。類似地，6 字元的環狀數串 011011 無法經過有限次的操作，將其變成各字元均為 0 的數串，所以它也不是一個好數串。

試依序回答下列問題。

- (1) 試說明：每一個 3 字元的直線數串都是好數串。
- (2) 試說明：每一個 4 字元的環狀數串都是好數串。
- (3) 有一個 8 字元直線數串 11111111，小明將它操作兩次如下：

$$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1} \xrightarrow{1} \bar{1}10\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1} \xrightarrow{2} \bar{1}10\bar{1}10\bar{1}\bar{1}，$$

發現繼續操作，數串都不會改變，因此，他推論原來的數串 11111111 不是好數串。試問：小明的推論是否正確？並請說明理由。

- (4) 試問：是否每一個 7 字元的直線數串都是好數串？並請說明理由。
- (5) 試問：是否每一個 8 字元的環狀數串都是好數串？並請說明理由。
- (6) 試利用數學歸納法證明：若 $a_1 = 0$ 或 $a_n = 0$ ，則直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (7) 試證：若在直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中，有某一個 i 使得連續 2 字元 $a_i a_{i+1} = 00$ 或連續 3 字元 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 010$ 或 $a_i a_{i+1} a_{i+2} = 111$ ，則直線數串 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都是好數串。
- (8) 試證：當 $n = 3k + 1 \geq 4$ 時，每一個 n 字元的直線數串都是好數串。
- (9) 試證：當 $n = 3k + 2 \geq 2$ 時，恰有一個 n 字元的直線數串不是好數串。
- (10) 試問：當 $n = 3k \geq 3$ 時，是否每一個 n 字元的環狀數串都是好數串？如果是，請證明；如果不是，請找出所有的非好數串，並請說明理由。

參考資源

TRML 高中數學競賽。財團法人九九文教基金會。 <https://www.99cef.org.tw/trml-s/>
臺灣數學奧林匹亞競賽 (IMO)。數學奧林匹亞辦公室，國立臺灣師範大學數學系。
<https://www.math.ntnu.edu.tw>
American Mathematics Competition (AMC). Mathematical Association of America.
<https://maa.org/math-competition>.

參考文獻

- 朱亮儒 (2025)。2024 TRML 思考賽試題探究與回饋。科學教育月刊，481，31-42。
- 朱亮儒 (2025)。TRML 高中數學競賽思考賽試題命題與解題策略。高中數學學科中心電子報，213，1-18。
- Hartsfield N. & Ringel G. (1990). *Pearls in Graph Theory*. Academic Press.
- Liu, C. L. (1968). *Introduction to combinatorial mathematics*. McGraw-Hill.
- Lovász, L., Pelikán, J., & Vesztergombi, K. (2003). *Discrete mathematics: Elementary and beyond*. Springer.
- Rosen, K. H. (2019). *Discrete mathematics and its applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.