計算機融入教學-三角函數篇

魏光旺
高雄市立左營高級中學

壹、緣起

108 課綱施行已過了 6 年，依據十二年國民基本教育數學領域課程綱要之基本理念，數學教學應培養學生正確使用工具的素養，在推行使用工具素養上有不少篇關於計算機在指對數單元教學的限制，這時候就會以數學概念來過渡使用計算機的概念，然而在三角函數單元的教學上，確遲遲沒有計算機在三角函數單元使用限制的文章出來，更遑論可以過渡計算機在三角函數上使用限制的數學概念了，筆者曾多次向六家教科書的業務反應，仍舊未有相關內容產出，因此，筆者責無旁貸的由自己撰寫這個部份的內容，請各方賢達不吝指教，來完善充實相關內容。

貳、世界脈動與社會變遷

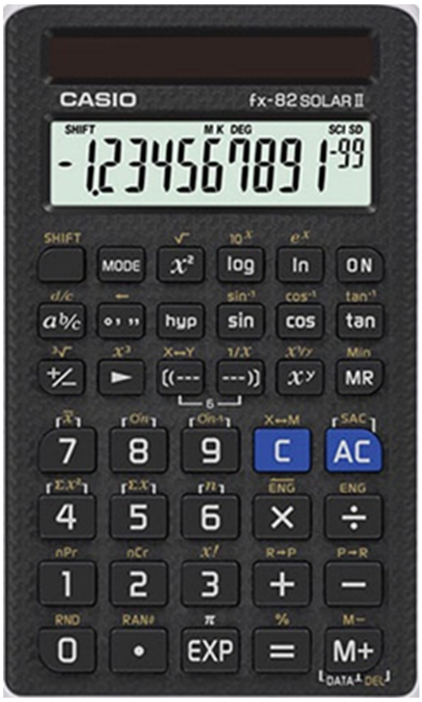
人類的社會變遷源於生活的需求，從石器時代、鐵器時代到 18 世紀工業革命，人類生活方式因使用工具的不同而不斷的在進化。以獸力取代人力邁入農耕時代，以機器取代獸力邁入工業時代，以電腦 AI 取代人力邁入資訊時代，這進化過程中的重點皆在於節省人力、提昇效率！108 課綱具有前瞻性，從人類生活的演變中可以清楚的了解到「工具」的重要性，因此「工具素養」的培育是必須的也是刻不容緩的。我們的教育應該為我們的下一代培植能面對未來社會變遷的能力，教材內容必須與時俱進，那麼該如何降低學生學習負擔，提昇學習效率呢？這是我們的重要課題。

高速公路電子收費系統(ETC)於 2006 年 2 月 10 日啟用，取代了人工收費，接下來數年各百貨公司停車場、路邊停車收費亭陸續由電子收費系統取代人工收費。這 2~3 年間 AI 軟體蓬勃發展，生活中很多人力的工作逐漸被電子化系統取代，以前的人工點餐逐漸轉變成掃描 QR code 點餐，人工送餐也開始轉由送餐機器人取代，路邊停車開單也陸續在更換為智慧開單。面對快速變化的社會，也為了符合未來產業的需求，操作與使用機器是未來產業必修的課題，而在 108 課綱中所提的「工具素養」就符合時代的需求，在數學課堂的教學、評量中，計算機的教學與使用應該被重視起來，這是最簡單而且也是最廉價的工具，讓學生在學習與評量上能夠確實達到節省人力、提昇效率的目標。重要的是計算機

需要配合數學概念使用才有意義，計算機也有其使用的限制，了解限制才能以數學概念來過渡並克服計算機的限制。

參、以龍騰版高二數學 3A 三角函數單元為例

筆者以現階段課堂上教學的教材及工具為例，來說明計算機在三角函數教學上的限制，並以數學概念來過渡克服計算機的限制，且以型號 CASIO fx-82 SOLARII 計算機操作介紹，如下圖所示：



肆、計算機在三角函數教學上的操作限制與角度象限轉換公式

以三角函數值來反查角度時，所查出來的角度可能會與目標角度所在象限不符，這時候就需要象限轉換公式，分別如下：

$$\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$$

$$\cos\theta = \cos(360^\circ - \theta)$$

$$\tan\theta = \tan(180^\circ + \theta)$$

說明：

一、若 $\sin\theta$ 的函數值已知時，利用計算機反查角度 θ 時，查找出來的角度為 $-90^\circ \le \theta \le 90^\circ$，題目要求的角度 θ 若為第二象限角或第三象限角時，那麼就要使用 $\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$ 來做象限角度轉換。

二、若 $\cos\theta$ 的函數值已知時，利用計算機反查角度 θ 時，查找出來的角度為 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$，題目要求的角度 θ 若為第三象限角或第四象限角時，那麼就要使用 $\cos\theta = \cos(360^\circ - \theta)$ 來做象限角度轉換。

三、若 $\tan\theta$ 的函數值已知時，利用計算機反查角度 θ 時，查找出來的角度為 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$，題目要求的角度 θ 若為第二象限角或第三象限角時，那麼就要使用 $\tan\theta = \tan(180^\circ + \theta)$ 來做象限角度轉換。

例 1. 已知 θ 為第二象限角且滿足 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，求 θ 的值。

解：

在計算機依序輸入 1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{sin}}$ ，會得到 30。

再接著輸入 $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 180 $\boxed{=}$，會得到 150，即 $\theta = 150^\circ$。

在解法的第一列中，使用計算機計算的是 $\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ$，在第 2 列的操作是 $-30^\circ + 180^\circ = 150^\circ$。

例 2. 已知 θ 為第三象限角且滿足 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 θ 的值。

解：

在計算機依序輸入 3 $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{sin}}$ ，會得到 -60。

再接著輸入 $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 180 $\boxed{=}$，會得到 240，即 $\theta = 240^\circ$。

在解法的第一列中，使用計算機計算的是 $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -60^\circ$，在第 2 列的操作是 $-(-60^\circ) + 180^\circ = 240^\circ$。

例 3. 已知 θ 為第三象限角且滿足 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，求 θ 的值。

解：

在計算機依序輸入　1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$2 $\boxed{=}$　$\boxed{\text{shift}}$$\boxed{\cos}$　，會得到 120。

再接著輸入 $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 360 $\boxed{=}$，會得到 240，即 $\theta=240°$。

在解法的第一列中，使用計算機計算的是 $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})=120°$，在第 2 列的操作是 $-120°+360°=240°$。

例 4. 已知 θ 為第四象限角且滿足 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 θ 的值。

解：

在計算機依序輸入　3 $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\cos}$　，會得到 30。

再接著輸入 $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 360 $\boxed{=}$，會得到 330，即 $\theta=330°$。

在解法的第一列中，使用計算機計算的是 $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=30°$，在第 2 列的操作是 $-30°+360°=330°$。

例 5. 已知 θ 為第二象限角且滿足 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，求 θ 的值。

解：

在計算機依序輸入 3　$\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\tan}$　，會得到－60。

再接著輸入 $\boxed{+}$ 180 $\boxed{=}$，會得到 120，即 $\theta=120°$。

在解法的第一列中，使用計算機計算的是 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-60°$，在第 2 列的操作是 $-60°+180°=120°$。

例 6. 已知 θ 為第三象限角且滿足 $\tan\theta = 1$，求 θ 的值。

解：

在計算機依序輸入 1 $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{tan}}$ ，會得到 45。

再接著輸入 $\boxed{+}$ 180 $\boxed{=}$，會得到 225，即 $\theta = 225°$。

在解法的第一列中，使用計算機計算的是 $\tan^{-1} 1 = 45°$，在第 2 列的操作是 $45° + 180° = 225°$。

伍、計算機對三角函數的和差角公式教學的影響

當題目給定函數值與角度的象限時，我們可以透過計算機來反查角度，若查得的角度與已知的象限不符時，就以角度象限轉換公式進行轉換至正確的象限，再利用計算機的記憶功能（M+），就可以去處理和差角、倍角、半角的函數值計算，因此在這個部份，公式的操演與使用是不需要的，如以下示例：

例 1. 已知 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ ，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，且 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ 、 $\sin\beta = \dfrac{24}{25}$ ，求下列各式的值：

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$

解：

以計算機操作 $\cos^{-1}\dfrac{3}{5} = \alpha$ ，並將 α 存入記憶體

鍵入次序：3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{M+}}$

以 $\boxed{\text{AC}}$清空輸入欄，再操作 $\sin^{-1}\dfrac{24}{25} = \theta$ ， $-\theta + 180 = \beta$ ，並將 β 存入記憶體

鍵入次序：24 $\boxed{\div}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{+/-}}$ $\boxed{+}$ 180 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$

目前記憶體存入的值為 $\alpha + \beta$

(1) $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{sin}}$ ，會得到 0.352，即 $\sin(\alpha+\beta) = 0.352$。

(2) $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{cos}}$ ，會得到 -0.932 ，即 $\sin(\alpha+\beta) = -0.932$。

例 2. 在 ΔABC 中，已知 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$ 且 $\cos B = \dfrac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值(四捨五入取至小數點第 2 位)。

解：

以計算機操作 $\cos^{-1}(-\dfrac{3}{5}) = A$，並將 A 存入記憶體

鍵入次序 1：3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{-}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{M+}}$

以 $\boxed{\text{AC}}$ 清空輸入欄，再操作 $\cos^{-1}\dfrac{12}{13} = B$，並將 B 存入記憶體

鍵入次序 2：$\boxed{\text{AC}}$ 12 $\boxed{\div}$ 13 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{M+}}$

此時記憶體存入的是 $A+B$，接下來操作 $180-(A+B)=C$，即可得 $\cos C \approx 0.86$

鍵入次序 3：$\boxed{\text{AC}}$ 180 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{cos}}$

例 3. 在 ΔABC 中，已知 $\tan A = 1$ 且 $\tan B = -2$，求 $\tan C$ 的值(四捨五入取至小數點第 2 位)。

解：

以計算機操作 $180 - \tan^{-1}1 - [\tan^{-1}(-2) + 180] = C$，即可得 $\tan C = 0.33$

鍵入次序：180 $\boxed{-}$ 1 $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{[(---}}$ 2 $\boxed{\text{+/-}}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{+}$ 180 $\boxed{\text{---)]}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{tan}}$

例 4. 設 θ 為第二象限角，且 $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$，求 $\sin 2\theta$、$\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 的值(四捨五入取至小數點第二位)。

解：

以計算機操作 $\cos^{-1}(-\dfrac{3}{5}) = \theta$，再將 $\theta \times 2$ 存入記憶體

鍵入次序 1：3 $\boxed{\text{+/-}}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$

呼叫記憶體 2θ 的值，即可依序得到 $\sin 2\theta = -0.96$、$\cos 2\theta = -0.28$、$\tan 2\theta \approx 3.43$

鍵入次序 2：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{sin}}$

鍵入次序 3：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{cos}}$

鍵入次序 4：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{tan}}$

例 5. 已知 $180° < \theta < 270°$ 且 $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$，求 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 、 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 與 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的值(四捨五入取至小數點第二位)。

解：

以計算機操作 $\cos^{-1}(-\dfrac{3}{5}) = \alpha \approx 126.87°$，需以 $\cos\theta = \cos(360° - \theta)$ 做象限角度轉換，即 $\theta = -\alpha + 360°$，再將 $\theta \div 2$ 存入記憶體

鍵入次序 1：3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 360 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$

呼叫記憶體 $\dfrac{\theta}{2}$ 的值，即可依序得到 $\sin\dfrac{\theta}{2} \approx 0.89$ 、 $\cos\dfrac{\theta}{2} \approx -0.45$ 、 $\tan 2\theta = -2$

鍵入次序 2：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\sin}$

鍵入次序 3：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\cos}$

鍵入次序 4：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\tan}$

例 6. 已知 $90° < \theta < 135°$，且 $\sin 2\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，試求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 的值(四捨五入取至小數點第二位)。

解：

因為 $90° < \theta < 135°$ ，所以 $180° < 2\theta < 270°$ 。

以計算機操作 $\sin^{-1}(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}) = \alpha \approx -70.53°$ ，需以 $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ 做象限角度轉換，即 $2\theta = -\alpha + 180°$ 再將 $\theta \div 2$ 存入記憶體

鍵入次序 1：2 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{+/-}$ +180 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$

呼叫記憶體 $\dfrac{\theta}{2}$ 的值，即可依序得到 $\sin\theta \approx 0.82$ 與 $\cos\theta \approx -0.58$ 。

鍵入次序 2：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\sin}$

鍵入次序 2：$\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\cos}$

在以上例題的解題過程中，需要使用到完整的數學概念並了解計算機的限制，同時要有清楚的解題邏輯思維，才能順利完成任務。整體來看，解題過程中花在思考與操作計算機的時間較紙筆計算來的少，且在避開複雜數值計算的同時透過動手操作的即時回饋，可以讓學生的思考從操作的過程中被看見。

陸、計算機對三角的正餘弦的疊合教學影響

正餘弦的疊合架構在和差角公式的應用上，即使引入計算機也是不可偏廢的學習重點，因此在介紹完和差角公式後，方才可以進入正餘弦疊合的教學。

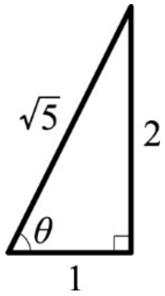
由於有計算機的協助，所以在做正餘弦疊合時，所有疊合的角度都是可以透過計算機得到，這樣能夠讓教學更有感，以下就舉例子說明：

例 1. 求 $y=\sin x+2\cos x$的最大值和最小值：(以四捨五入取至小數點第 2 位)

解：

將函數表成正弦函數的形式，得

$$
\begin{aligned}
y&=\sin x+2\cos x\\
&=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)\\
&=\sqrt{5}\sin(x+\theta)
\end{aligned}
$$



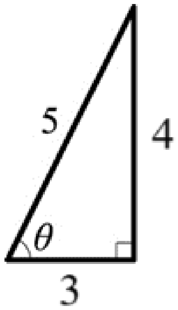
其中 $\theta=\sin^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}\approx 1.11$ 弳，故 y 的最大值為 $\sqrt{5}$，最小值為 $-\sqrt{5}$。

例 2. 在 $0\le x\le \pi$ 的範圍內，求函數 $y=3\sin x-4\cos x$ 的最大值與最小值，並求其對應的 x 值(以四捨五入取至小數點第 2 位)。

解：

將函數表成正弦函數的形式，得

$$
\begin{aligned}
y&=3\sin x-4\cos x\\
&=5(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x)\\
&=5(\sin x\cos\theta-\cos x\sin\theta)\\
&=5\sin(x-\theta)
\end{aligned}
$$



其中 $\theta=\sin^{-1}\frac{4}{5}\approx 0.93$ 弳，$-0.93\le x-\theta\le 2.21$，使用 $\boxed{\text{M+}}$功能存入 θ 的實際值

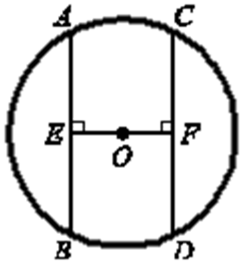
當 $x-\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，$x=2.50$ 弳，最大值 $y=5\sin\frac{\pi}{2}=5$。

當 $x-\theta=-0.93$ 時，$x=0$，最小值 $y=5\sin(-\theta)=-5\sin\theta=-5\times\frac{4}{5}=-4$(實際值)

若以 $\theta\approx 0.93$ 弳計算，最小值 $y=5\sin(-\theta)=-5\sin\theta=-5\times 0.802=-4.01$(近似值)

例 3. 想在半徑 50 公尺的圓形池塘內，建造一座 H 字形的木橋跨越池面，如右圖所示。

設 O 為圓心，$\angle COF=x$（$0<x<\frac{\pi}{2}$），$\overline{EF}\perp\overline{AB}$，$\overline{EF}\perp\overline{CD}$，且 $\overline{EO}=\overline{OF}$。



(1) 選出木橋的總長。

① $200\sin x$　② $100\cos x$　③ $200\sin x+100\cos x$

④ $100\sin x+200\cos x$。

(2) 求木橋總長最長的長度，與此時 $\overline{EF}$ 的長度(以四捨五入取至小數點第 2 位)。

解：

(1) 依題意得 $\overline{CF}=50\sin x$、$\overline{CF}=50\cos x$

因此，木橋總長為

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=2\cdot 50\sin x+2\cdot 50\sin x+2\cdot 50\cos x=200\sin x+100\cos x$$

故選③

(2) $200\sin x+100\cos x=100\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x)\approx 100\sqrt{5}\sin(x+26.57°)$

其中 $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 26.57°$，故當 $\sin(x+26.57°)=1$ 時，木橋總長最長為 $100\sqrt{5}$ 公尺，此時 $x+26.57°=90°$，即 $x=63.43°$，

故 $\overline{EF}=2\overline{OF}=100\cos x=100\cdot\cos 64.43°=100\times 0.44729\approx 44.73$(公尺)。

當計算機引入後，在素養試題上的命題，角度就不再侷限於特別角，命題上更可以貼近現實的情境與數據，在疊合上的疊合角皆可利用計算機求出近似角度來使用，對學生而言，是個可以感受到大小的角度數值，而不是以抽象的 θ 符號來代表角度。

柒、計算機對三角函數單元教學與評量需要調整的題型

有些題型在數學概念教學時有意義，但是在評量時會因為計算機的存在而導致無法達到評量目標，試題例舉如下：

例 1. 利用和角公式計算 $\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ$ 的值。

解：

（解一）：

$$\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ = \cos(17^\circ + 28^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ 。

（解二）：

以計算機操作： $\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ \approx 0.707$ 。

例 2. 求 $\dfrac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \dfrac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ}$ 的值。

解：

（解一）：

$$\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = \frac{3\sin 12^\circ - 4\sin^3 12^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{4\cos^3 12^\circ - 3\cos 12^\circ}{\cos 12^\circ}$$

$$= 3 - 4\sin^2 12^\circ - 4\cos^2 12^\circ - 3 = 6 - 4 = 2$$ 。

（解二）：

以計算機操作： $\dfrac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \dfrac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = 2$ 。

例 3. 求 $\tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ$ 的值。

解：

（解一）：

因為 $32^\circ + 13^\circ = 45^\circ$ ，所以 $\tan(32^\circ + 13^\circ) = \tan 45^\circ$ ，

可得 $\dfrac{\tan 32^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ} = 1$，即 $\tan 32^\circ + \tan 13^\circ = 1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ$ 。

故 $\tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ = 1$ 。

（解二）:

以計算機操作： $\tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ = 1$ 。

例 4. 求 $\dfrac{1}{\cos 80^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$ 的值。

解：

（解一）:

$$\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ \cos 80^\circ} = \frac{2 \times 2(\frac{1}{2}\sin 80^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ)}{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}$$

$$= \frac{4 \times \sin(80^\circ - 60^\circ)}{\sin 160^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4 \text{ 。}$$

（解二）:

以計算機操作： $\dfrac{1}{\cos 80^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = 2$ 。

在以上例題中，為了讓學生熟悉和差角公式、倍角公式的使用，進而設計了專門的題型，這些題型在概念引入的教學中是有意義的，然而在開放使用計算機時，這些題型在評量時並不能符合評量目標的需求，因此這就造成了教師們是否允許評量時使用計算機的岐議。

捌、計算計算機無法協作的題型

計算機在解方程式類的題型可能無法協作，這類題型大多需要和差角公式、倍角公式、半角公式等作為解題工具進行解題，其間需要學習諸多解題技巧，也造成了許多學生困擾與學習障礙。

例 1. 已知 $\sin\theta = \dfrac{6}{5}\cos\dfrac{\theta}{2}$，求 $\cos\theta$ 的值。

解：

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{6}{5}\cos\frac{\theta}{2}$$

$2\cos\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-\frac{3}{5})=0$，解得 $\cos\frac{\theta}{2}=0$ 或 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

即 $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=-1$ 或 $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\times(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$。

例 2. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2}$ 且 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值。

解：

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{9}{4}\ \cdots..(1)$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{3}{4}\cdots.(2)$$

(1)式+(2)式：

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=3$$

整理後得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$。

玖、以計算機協作歷年大考試題示例

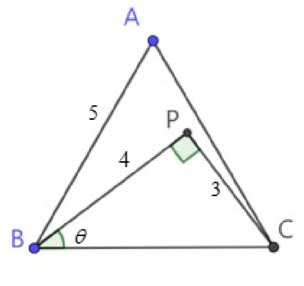
1. ΔABC 是邊長為 5 的正三角形，P 點在三角形內部。已知線長度 $\overline{PB}=4$ 且 $\overline{PC}=3$，求 $\cos\angle ABP$ 的值。（四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}=1.732$）【指甲】

解：

ΔPBC 為邊長 3、4、5 的直角三角形，且 $\angle BPC=90^\circ$

令 $\angle PBC=\theta$，可得 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\theta=\sin^{-1}\frac{3}{5}$，$\angle ABP=60^\circ-\theta$，



$\cos\angle ABP=0.9196...\approx0.92$

其中 $\theta\approx36.87^\circ$，$\angle ABP=60^\circ-\theta\approx23.13^\circ$

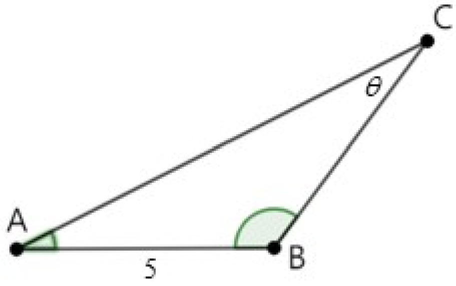
以計算機操作，在 $\boxed{\text{DEG}}$ 模式下依序鍵入：

60 $\boxed{-}$ $\boxed{[(---}$ 3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{---)]}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\cos}$

此題使用計算機協作時，建議先列出算式，再依所求的目標，配合計算機的運算邏輯要求操作，過程中利用角度加減的計算即可取代和差角公式的繁雜計算。

2. 在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=-\dfrac{3}{5}$，且其外接圓半徑為 $\dfrac{13}{2}$，求 $\sin\angle BAC$ 的值。【指甲】

解：



利用正弦定理：

$$\frac{5}{\sin\theta}=2\times\frac{13}{2}\text{，即}\sin\theta=\frac{5}{13}$$

又 $\angle ABC=\cos^{-1}(-\dfrac{3}{5})\approx 126.87°$，

$$\theta=\sin^{-1}\frac{5}{13}\approx 22.62°$$

$$\angle BAC=180°-\angle ABC-\theta=180°-\cos^{-1}(-\frac{3}{5})-\sin^{-1}\frac{5}{13}\text{，}$$

$$\sin\angle BAC=0.50769...\approx 0.51$$

以計算機操作，在 $\boxed{\text{DEG}}$ 模式下依序鍵入：

180 $\boxed{-}$ $\boxed{[(---}$ 3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{---)]}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{-}$ $\boxed{[(---}$ 5 $\boxed{\div}$ 13 $\boxed{---)]}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sin}$

標準答案為 $\dfrac{33}{65}=0.50769...$。

3. 在 ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點且 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$。已知 $\overline{BD}=5$、$\overline{DC}=7$，且 $\angle ABC=60°$。
   (1) 試求 $\sin\angle ACB$ 的值。
   (2) 試求 $\sin\angle BAC$ 的值。
   (3) 試求 $\overline{AB}$ 邊的長。　【指甲】

解：

(1) 因為 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，設 $\angle BAD=\angle CAD=\theta$

由正弦定理，在 ΔABD 中 $\dfrac{5}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 60°}$

$$\overline{AD}=\frac{5}{\sin\theta}\times\sin 60°=\frac{5\sqrt{3}}{2\sin\theta}$$

在 ΔACD 中 $\dfrac{7}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ACD}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ACB}$

$\sin\angle ACB=\overline{AD}\times\dfrac{\sin\theta}{7}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{7}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ 。

(2) $\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB=180°-60°-\sin^{-1}(\dfrac{5\sqrt{3}}{14})$ ， $\sin\angle BAC=0.9897\cdots$

以計算機操作，在 $\boxed{\text{DEG}}$ 模式下依序鍵入：

180 $\boxed{-}$ 60 $\boxed{-}$ $\boxed{[(---}$ 5 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\div}$ 14 $\boxed{---)]}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\text{M+}}$

此時計算機記憶體儲存的是 $\sin\angle BAC=0.9897\cdots$ 。

(3) 由正弦定理，在 ΔABC 中 $\dfrac{12}{\sin\angle BAC}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}$

$$\overline{AB}=\frac{12}{\sin\angle BAC}\times\sin\angle ACB=7.5$$

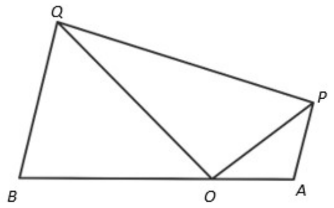
承續(2)，依序鍵入：

12 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\div}$ 14 $\boxed{=}$

此題中(2)的標準答案為 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=0.9897....$，若取近似值 $\sin\angle BAC\approx 0.99$ ，在(3)的答案 $\overline{AB}=7.498...\approx 7.50$ 似乎會有些微的誤差存在被忽略。而在(2)中使用 $\boxed{\text{M+}}$ 可將 $\sin\angle BAC$ 的實際值存入記憶體，在(3)承接使用實際值，就可以得到沒有誤差的實際值 7.5。

【112 學測-混合題】

坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1,0)$、$B(-2,0)$ 兩點。另有兩點 P、Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP}=\overline{OA}$、$\overline{BQ}=\overline{OB}$、$\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP=\theta$。根據上述，試回答下列問題。



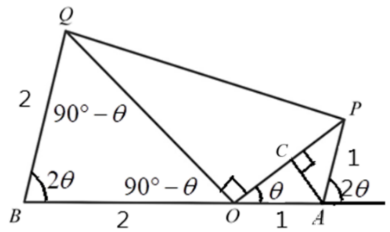
18. 線段 $\overline{OP}$ 長為下列哪一選項？（單選題，3 分）
    (1) $\sin\theta$　(2) $\cos\theta$　(3) $2\sin\theta$　(4) $2\cos\theta$　(5) $\cos 2\theta$

19. 若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。（非選擇題，6 分）

20.（承 19 題）試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。（非選擇題，6 分）

解：

18. 如圖，作 $\overline{AC}\perp\overline{OP}$，可得 $\overline{OC}=\cos\theta$，即 $\overline{OP}=2\overline{OC}=2\cos\theta$，選(4)。



19. 如圖，$\angle OAP$ 的外角 $=\angle OBQ=2\theta$，即 $\overline{AP}//\overline{BQ}$，又 $\overline{OA}=\overline{AP}=1$、$\overline{BQ}=\overline{OB}=2$

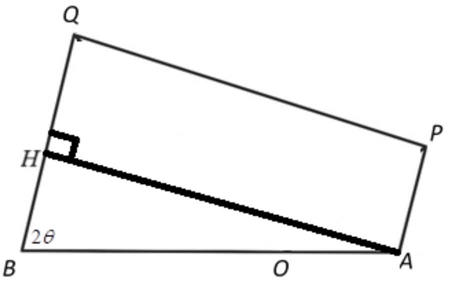
$\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$，故 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$$P(\overline{OP}\cos\theta,\overline{OP}\sin\theta)\Rightarrow P(2\cos^2\theta,2\sin\theta\cos\theta)\Rightarrow P(\frac{32}{25},\frac{24}{25})\Rightarrow \overrightarrow{AP}=(\frac{7}{25},\frac{24}{25})$$

$$\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}\Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OB}=2(\frac{7}{25},\frac{24}{25})+(-2,0)=(\frac{-36}{25},\frac{48}{25})$$

即 $Q(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})$。

20. 作 $\overline{AH} \perp \overline{BQ}$，點 A 到直線 BQ 的距離 $\overline{AH} = \overline{AB}\sin 2\theta = 2.88$



以計算機依序鍵入：

3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$

梯形 $PABQ$ 的面積 $= \dfrac{(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\overline{AH}}{2} = \dfrac{(1+2)\times 2.88}{2} = 4.32$ 。

拾、計算機協作推動的困境

「工欲善其事，必先利其器」，配合大考的規定進行準備是大家在教學上一致的共識，計算機協作教學和紙筆教學的訓練方式是不同的。在前面的例子中，有關倍角公式與和差角公式的題型，在計算機協作上可以被捨棄，但在紙筆的計算上卻是必須要加強，在教學現場上，為了配合大考的現場環境，我們不得不回歸加強學生們在紙筆上的計算，以期學生在大考上能取得好成績，進入理想的大學就讀。在教學現場上，每週 4 小時的授課時數，在訓練學生們倍角公式與和差角公式的使用時，實在沒有多餘的時間與能力同時教學生們使用計算機協作，這就像在打仗前，我們訓練時給予強力、精良的武器與普通的武器，但作戰當下卻只提供普通的武器，在這樣的情境下，為了大考上有較好的表現，就就只能強化普通武器的使用技巧。

拾壹、未來展望

世界未來的走向，機器取代人工是可以預期的，作業員的工作將會轉變為「如何下達正確的指令給機器」，這就像是在使用 ChatGPT 這類的對話 AI 一樣，下達的指令精準，才能得到較好、較正確的產出，因此如何下達指令是需要時間來學習、訓練，而計算機協作可以看作是操作這些人工智慧軟體的前導學習與訓練的最佳工具。

未來教學走上計算機協作的道路上是否可行，我們需的是開始！在 108 課綱已經走到一半的路程上，期待我們計算機的協作教學，能迎頭趕上世界各先進國家的腳步，唯有大考開放計算機作為應試工具，我們才能在紙筆計算與計算機協作教學上調整與改變。

在學習的過程中多一種選擇與可能是非常可貴的，不管倍角公式是否會因計算機協作的緣故而在教學上有所調整，在高階的數學理論與實務應用上，確實有它存在的價值與歷史意義，就像積化和差與和差化積的公式雖然從課程中刪除，但它在加深加廣與探究實作的課程中，仍然是數學中前人智慧的結晶。

計算機協作教學實行後，在評量命題上會有更多的彈性，在角度的使用上就不會再侷限於眾所周知的特別角，同時可以解決複雜數值計算造成的困擾及評量概念時的失焦。至於計算機協作是否能同時減輕教師教學與學生學習的負擔，提昇學生學習的效率，有待大考開放計算機作為應試工具後再來研究。

參考文獻

許志農主編(2022)。**數學 3A**。龍騰文化。
許志農主編(2023)。**數學 3A 教學講義**。龍騰文化。