從一道與重新劃設土地界線有關之作圖題的另解談起

連威翔

優食台灣股份有限公司

壹、前言

在數學傳播季刊 32 卷 2 期《徵求最簡答案》(文獻[1])一文中，作者提出了一道作圖題，其敘述如下：

問題 1：已知三直線 l_1、l_2 及 m，A、B 分別是 l_1、l_2 上的定點。今問：能否用尺規作圖的方法在 l_1、l_2 上分別找到 C 及 D，使得 CD 平行 m，且 ΔACE 及 ΔBDE 兩者的面積相等？

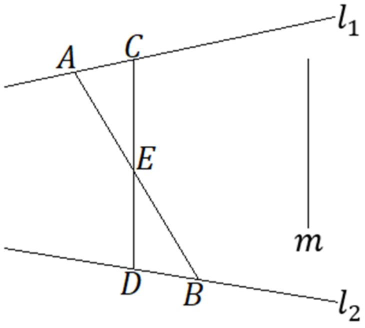

圖 1

在問題 1 公布之後，數學傳播 32 卷 4 期的《徵求最簡答案的回響》(文獻[2])這篇文章中公布了問題 1 的所有投稿之中的最簡解答，該解答的手法是先在圖 1 中畫出 l_1、l_2 兩直線的交點，再測量該交點至過 A 且平行 m 以及過 B 且平行 m 之兩直線的距離，計算此兩距離的幾何平均數後即可在圖 1 中作出符合所求的 $\overline{CD}$。

筆者當年也參加了上述問題 1 的徵答活動，且至今還保留著當年為了參加徵答活動而撰寫的手寫紙本稿件(因為最終並未入選，故由數學傳播編輯部寄回給筆者)。閱讀當年自己所寫下的解答後，筆者也試著將該解答予以簡化。在底下第二節中，筆者將介紹這個經簡化後的解答供有興趣的讀者參考，並且會在第三與第四節中介紹一些相關探討。

貳、不必畫出 l_1、l_2 交點的作圖法

對於第一節的問題 1，如同[2]文之最簡解答的作者在介紹其解答之前所說，我們暫不考慮圖 1 中 l_1、l_2 平行的簡單情況。接著，筆者介紹問題 1 的解法如下：

作法：將圖 1 中僅作示意用途的 $\overline{CD}$ 抹去後，分別過 A,B 兩點作直線 m 的平行線，令前者交 l_2 於點 F，後者交 l_1 於點 G。在 $\overline{AF}$ 的延長線上取點 P 使 $\overline{FP}$ 的長度為 $\overline{AF},\overline{BG}$ 長度的幾何平均數 $\sqrt{\overline{AF}\cdot\overline{BG}}$，其中 F,P 兩點位於點 A 的同側，如下圖。

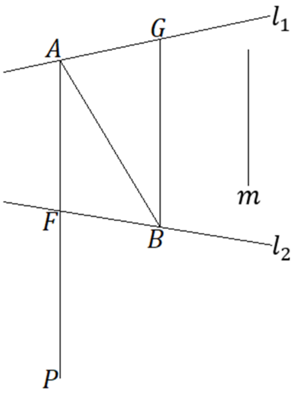

圖 2

上圖中 $\overline{FP}=\sqrt{\overline{AF}\cdot\overline{BG}}$ 這個長度的取法讀者可參考[3]文右上角的動畫，此處不再贅述。

回到圖 2，連接 $\overline{PG}$ 後令 $\overline{PG}$ 交 $\overline{BF}$ 於點 D，過點 D 作直線 m 的平行線設分別交直線 l_1 及 $\overline{AB}$ 於點 C,E，則 $\overline{CD}$ 即為所求，如下圖。

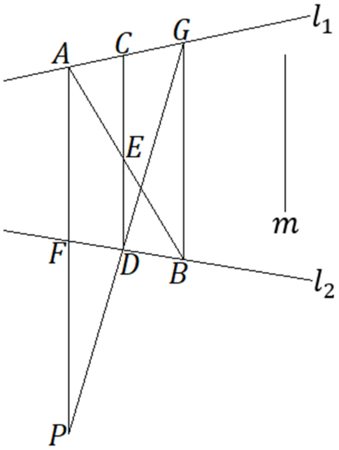

圖 3

證明：在圖 3 中令 $\overline{AF}=a,\overline{BG}=b$，則 $\overline{FP}=\sqrt{\overline{AF}\cdot\overline{BG}}=\sqrt{ab}$。觀察 $\Delta FDP,\Delta BDG$，由於 $\angle FDP=\angle BDG$ (對頂角)且 $\angle DFP=\angle DBG$ (內錯角)，因此知 $\Delta FDP\sim\Delta BDG$，可寫下

$$\overline{FD}:\overline{BD}=\overline{FP}:\overline{BG}=\sqrt{ab}:b=\sqrt{a}:\sqrt{b}.$$

由於圖 3 中 $\overline{AF},\overline{CD},\overline{GB}$ 彼此平行，利用平行線截比例線段性質可推得

$$\overline{AC}:\overline{CG}=\overline{FD}:\overline{DB}=\sqrt{a}:\sqrt{b},$$

至此利用以上兩式可推得

$$\overline{AC}:\overline{AG}=\overline{AC}:(\overline{AC}+\overline{CG})=\sqrt{a}:\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right),$$

$$\overline{BD}:\overline{BF}=\overline{BD}:(\overline{BD}+\overline{DF})=\sqrt{b}:\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

注意圖 3 中 $\Delta ACE\sim\Delta AGB$ 且 $\Delta BDE\sim\Delta BFA$，由於相似三角形之面積比等於對應邊的長度平方比，因此可計算上述兩組相似三角形的面積比值如下：

$$\frac{\Delta ACE}{\Delta AGB}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AG}^2}=\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2},$$

$$\frac{\Delta BDE}{\Delta BFA}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BF}^2}=\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\frac{b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2},$$

且利用以上兩式可推得

$$\Delta ACE=\frac{a\cdot\Delta AGB}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}, \tag{1}$$

$$\Delta BDE=\frac{b\cdot\Delta BFA}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}. \tag{2}$$

注意在圖 3 中，若 $\Delta AGB,\Delta BFA$ 分別以 $\overline{BG},\overline{AF}$ 為底邊，則兩三角形的高皆與梯形 $AFBG$ 的高等長。令梯形 $AFBG$ 的高為 h，則可計算得圖 3 中 $\Delta AGB,\Delta AFB$ 的面積比值如下：

$$\frac{\Delta AGB}{\Delta AFB}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot\overline{BG}}{\frac{1}{2}h\cdot\overline{AF}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{AF}}=\frac{b}{a}. \tag{3}$$

計算(1) ÷ (2)，搭配(3)式的條件可推得

$$\frac{\Delta ACE}{\Delta BDE}=\frac{a}{b}\times\frac{\Delta AGB}{\Delta AFB}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1,$$

因此知 $\Delta ACE=\Delta BDE$，故圖 3 中的 $\overline{CD}$ 符合問題 1 所求，證明完畢。

注意上述作圖法不必像[2]文的解答那樣需先在圖 1 中畫出 l_1,l_2 的交點，且上述作圖法是針對圖 1 中 l_1,l_2 不平行的情況而寫下的方法。當 l_1,l_2 平行時，我們可直接在圖 1 中取 $\overline{AB}$ 的中點 E，過 E 作直線 m 的平行線分別交 l_1,l_2 於 C,D，則 $\overline{CD}$ 即為所求，此時不難證明 $\Delta ACE\cong\Delta BDE$ (留給讀者練習)，故 $\Delta ACE,\Delta BDE$ 的面積相等。

本節最後，筆者要提醒讀者的是，無論問題 1 中的 l_1, l_2 平行與否，在圖 3 中滿足問題 1 之結論的 $\overline{CD}$ 都是唯一的。為何會如此呢？注意在保持圖 3 中 C, D 分別落在 l_1, l_2 上且 $\overline{CD}$ 平行 $\overline{AF}$ 的條件下，若一開始滿足 $\Delta ACE = \Delta BDE$ 的 $\overline{CD}$ 往左移則 ΔACE 面積變小且 ΔBDE 面積變大，因此有 $\Delta ACE < \Delta BDE$；相對地，若 $\overline{CD}$ 往右移則有 $\Delta ACE > \Delta BDE$。因此在保持圖 3 中 C, D 分別落在 l_1, l_2 上且 $\overline{CD}$ 平行 $\overline{AF}$ 的條件下，一開始滿足 $\Delta ACE = \Delta BDE$ 的 $\overline{CD}$ 無論往左或往右移均使得 $\Delta ACE = \Delta BDE$ 不成立，故圖 3 中滿足問題 1 之結論的 $\overline{CD}$ 是唯一的。

參、看看另兩道作圖題

看完上一節對問題 1 介紹之作圖法與證明後，我們可繼續研究底下的問題：

問題 2：在圖 3 中令 $\overline{AF} = a, \overline{BG} = b$，問梯形 $AFDC, CDBG$ 的面積比為何？又 $\overline{CD}$ 長為何？

讀者可先自行研究問題 2 並試著找出其解答，可暫時不要往下閱讀。對於問題 2，筆者的解答如下：

解答：由於上一節後半的內容證明了圖 3 中有 $\Delta ACE = \Delta BDE$ 的條件，因此圖 3 具備下述的面積關係：

$$AFDC = AFDE + \Delta ACE = AFDE + \Delta BDE = \Delta AFB,$$

$$CDBG = CEBG + \Delta BDE = CEBG + \Delta ACE = \Delta AGB.$$

利用上兩式搭配前面在(3)式中寫下的 $\Delta AGB, \Delta BFA$ 之面積表達式，可推得

$$AFDC : CDBG = \Delta AFB : \Delta AGB = \left(\frac{1}{2}h \cdot \overline{AF}\right) : \left(\frac{1}{2}h \cdot \overline{BG}\right) = \overline{AF} : \overline{BG} = a : b, \tag{4}$$

其中 h 為梯形 $AFBG$ 的高，至此問題 2 的第一小題解答完畢。

至於問題 2 的第二小題，注意在圖 3 下方的證明介紹了 $\overline{FP} = \sqrt{\overline{AF} \cdot \overline{BG}} = \sqrt{ab}$ 的條件，且接著也證明了 $\Delta FDP \sim \Delta BDG$。由於 $\overline{CD}$ 平行 $\overline{AP}$，因此可推得圖 3 中有

$$\overline{PD} : \overline{GD} = \overline{FP} : \overline{BG} = \sqrt{ab} : b = \sqrt{a} : \sqrt{b},$$

$$\overline{CD} : \overline{AP} = \overline{GD} : \overline{GP} = \overline{GD} : (\overline{GD} + \overline{PD}).$$

有了以上兩式的條件，我們可先利用第一式令 $\overline{PD} = \sqrt{a}t, \overline{GD} = \sqrt{b}t$，其中 t 為正數，接著即可由第二式推得

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GD} + \overline{PD}} = \frac{\sqrt{b}t}{\sqrt{b}t + \sqrt{a}t} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

因此可推得圖 3 中有

$$\overline{CD}=\frac{\sqrt{b}\cdot\overline{AP}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}\cdot(\overline{AF}+\overline{FP})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}\left(a+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{ab}, \tag{5}$$

至此問題 2 解題完畢。

利用上述問題 2 的解答，我們就知道如何求得底下這道作圖題的解答：

問題 3：已知有梯形 $AFBG$，其中 $\overline{AF}$ 平行 $\overline{BG}$ ，$\overline{AF}=a,\overline{BG}=b$，而 a,b 為正數且 $a<b$。今問：能否用尺規作圖的方法在 $\overline{AG},\overline{BF}$ 上分別找到 C 及 D，使得 $\overline{CD}$ 平行 $\overline{AF}$，且 $AFDC$ 與 $CDBG$ 兩者的面積比為 $a{:}b$？

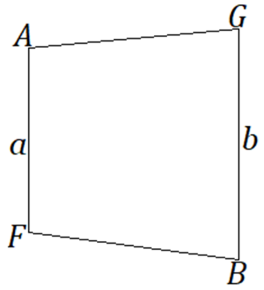

圖 4

作法：在 $\overline{AF}$ 的延長線上取點 P 使 $\overline{FP}=\sqrt{ab}$，其中 F,P 兩點位於點 A 的同側。連接 $\overline{PG}$ 並且設 $\overline{PG}$ 交 $\overline{BF}$ 於點 D，過點 D 作 $\overline{AF}$ 的平行線交 $\overline{AG}$ 於點 C，則 $\overline{CD}$ 即為所求，如下圖。

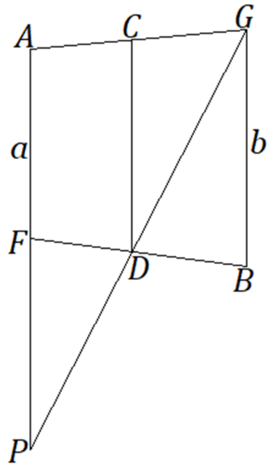

圖 5

證明：在圖 5 中連接 $\overline{AB}$，設 $\overline{AB}$ 交 $\overline{CD}$ 於點 E，如下圖。

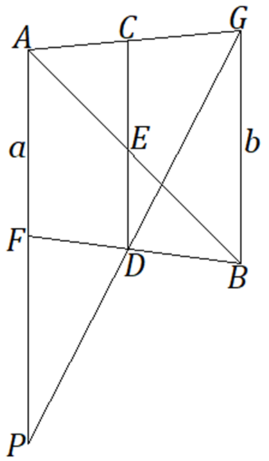

圖 6

回顧前一節問題 1 之解答中的證明，可知圖 6 中有 $\Delta ACE = \Delta BDE$ 的條件，再搭配前面推得(4)式之問題 2 的解答，即可確定圖 6 中 $AFDC{:}CDBG = a{:}b$，從而問題 3 解題完畢。

至此，我們知道本節的問題 3 與第一節問題 1 兩者的解法基本上是相同的。接下來，我們看底下這道透過修改問題 3 的結論而得的作圖題：

問題 4：如圖 4，已知有梯形 $AFBG$，其中 $\overline{AF}$ 平行 $\overline{BG}$，$\overline{AF} = a, \overline{BG} = b$，其中 a, b 為正數且 $a < b$。今問：能否用尺規作圖的方法在 $\overline{AG}, \overline{BF}$ 上分別找到 C 及 D，使得 $\overline{CD}$ 平行 $\overline{AF}$，且 $AFDC$ 與 $CDBG$ 兩者面積相等？

作法：在 $\overline{AF}$ 的延長線上取點 P 使 $\overline{AP}$ 長為 $\overline{AF}, \overline{BG}$ 的平方平均數(請參考文獻[4])，即取

$$\overline{AP} = \sqrt{\frac{\overline{AF}^2 + \overline{BG}^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \tag{6}$$

其中 F, P 兩點位於點 A 的同側，如下圖。

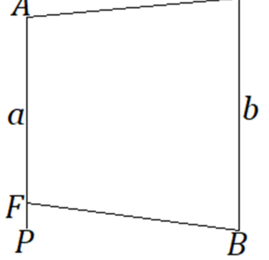

圖 7

要取得(6)式中的 $\overline{AP}$ 長並不難，注意到

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2},$$

因此只要作出一個兩股長為 $\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}$ 的直角三角形，以上式搭配畢氏定理可知直角三角形的斜邊長即可作為(6)式中的 $\overline{AP}$ 長。

回到圖 7，過點 P 作 $\overline{AG}$ 的平行線設交 $\overline{BF}$ 於點 D，並過點 D 作 $\overline{AF}$ 的平行線設交 $\overline{AG}$ 於點 C，則 $\overline{CD}$ 即為所求，如下圖。

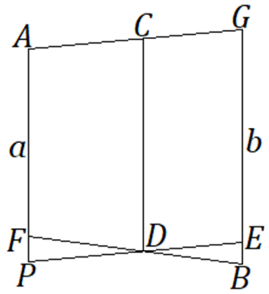

圖 8

證明：在圖 8 中由於 $\overline{AP}$ 平行 $\overline{CD}$、$\overline{AC}$ 平行 $\overline{PD}$，因此 $APDC$ 為平行四邊形，且同理可證明 $CDEG$ 為平行四邊形，此時搭配(6)式可推得

$$\overline{AP}=\overline{GE}=\overline{CD}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

在上式中我們令 $\ell=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，因此知 $\overline{AP}=\overline{GE}=\overline{CD}=\ell$，且此時有

$$\ell^2-a^2=b^2-\ell^2=\frac{b^2-a^2}{2}. \tag{7}$$

不難證明圖 8 中 $\Delta FDP\sim\Delta BDE$，兩三角形對應邊長度的比值滿足

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{FP}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AP}-\overline{AF}}{\overline{BG}-\overline{EG}}=\frac{\ell-a}{b-\ell}. \tag{8}$$

注意圖 8 中梯形 $AFDC$ 與平行四邊形 $APDC$ 同高，令兩者共用的高長度為 h，則兩者面積的比值可計算如下：

$$\frac{AFDC}{APDC}=\frac{\frac{1}{2}(\overline{CD}+\overline{AF})h}{\overline{CD}\cdot h}=\frac{\overline{CD}+\overline{AF}}{2\overline{CD}}=\frac{\ell+a}{2\ell}. \tag{9}$$

又圖 8 中平行四邊形 $CDEG$ 與梯形 $CDBG$ 同高，而 $APDC, CDEG$ 兩平行四邊形兩者等高，同理可推得這兩組四邊形的面積比值滿足

$$\frac{CDEG}{CDBG}=\frac{2\overline{CD}}{\overline{BG}+\overline{CD}}=\frac{2\ell}{b+\ell}, \tag{10}$$

$$\frac{APDC}{CDEG}=\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}}=\frac{\ell-a}{b-\ell}, \tag{11}$$

其中(11)式最後之等號的推論用上了(8)式。計算(9) × (10) × (11)，搭配(7)式的條件可推得

$$\frac{AFDC}{CDBG}=\frac{\ell^2-a^2}{b^2-\ell^2}=1,$$

上式顯示圖 8 中 $AFDC$ 與 $CDBG$ 兩梯形面積相等，至此證明完畢，故問題 4 解題完畢。

回顧本節內容，我們會發現問題 3 與問題 4 兩者之作圖法的差異。不過，其實我們也可仿照問題 4 的作圖法寫下問題 3 的新作圖法。對於問題 3，我們可仿照問題 4 的作法將原作圖法的第一步改為：

「在 $\overline{AF}$ 的延長線上取點 P ，使 $\overline{AP}$ 長為 $\overline{AF}, \overline{BG}$ 長度的幾何平均數 $\sqrt{ab}$。」

而接下來如何繼續改寫以得到問題 3 的新作法，就留給讀者練習。

此外，若回顧上一節最後的那段討論內容，類似地，我們知道對於本節的問題 3 與問題 4 來說使此兩問題結論成立的 $\overline{CD}$ 也都是唯一的。

肆、兩作圖法之間的關聯性

對問題 1 來說，本文第二節所介紹的解答與文獻[2]中的最簡解答均提出正確的解法，在本節中，我們不妨試著找出兩解法之間的關聯性。注意上述兩解答的一個共通點是在一開始都計算了兩線段長的幾何平均數，前者在一開始於圖 3 中取滿足 $\overline{FP}=\sqrt{\overline{AF}\cdot\overline{BG}}=\sqrt{ab}$ 的 $\overline{FP}$ ，且在前一節問題 3 的作圖法中於圖 6 再次使用此手法。

筆者研究過後，發現我們只要觀察圖 3 或圖 6 並列出一些面積關係進行計算，即可找出本文第二節問題 1 的解答與文獻[2]之解答的關聯性。此外，在本文第二節問題 1 的解答一開始取 $\overline{FP}=\sqrt{\overline{AF}\cdot\overline{BG}}=\sqrt{ab}$，相信不少讀者應該會對這個手法感到疑惑，不知道其由來為何，接下來筆者也將提出解釋。觀察圖 6 之後，我們回到最初的問題 1，並將所追尋的目標設定為希望在圖 6 中作出「具適當長度」的 $\overline{FP}$，使得連接 $\overline{PG}$ 交 $\overline{FB}$ 於點 D 並作出與 $\overline{AB}$ 交於點 E 的 $\overline{CD}$ 之後滿足 $\Delta ACE=\Delta BDE$ 的面積條件。

若依照上述方式在圖 6 中作出的 $\overline{CD}$ 滿足 $\Delta ACE=\Delta BDE$ 的面積條件，則由(4)式的推論過程可知圖 6 中具備 $ACDF:BDCG=a:b$ 的面積比條件。此時在圖 6 中令梯形 $AFBG$ 的高為 h，則可計算得 $AFBG$ 的面積為 $\frac{1}{2}(a+b)h$，又已知有 $ACDF:BDCG=a:b$，因此可推得梯形 $AFCD,DBGC$ 的面積分別為 $\frac{1}{2}ah,\frac{1}{2}bh$。接著在圖 6 中令 $\overline{CD}=\ell$，且令梯形 $AFDC$ 的高為 s，則不難推得梯形 $CDBG$ 的高為 $h-s$，從而可列出底下兩面積關係：

$$AFCD=\frac{1}{2}(a+\ell)s=\frac{1}{2}ah,\ \ DBGC=\frac{1}{2}(b+\ell)(h-s)=\frac{1}{2}bh.$$

利用以上兩式可寫下 $s=\frac{ah}{a+\ell},h-s=\frac{bh}{b+\ell}$，從而推得 $h=s+(h-s)=\left(\frac{a}{a+\ell}+\frac{b}{b+\ell}\right)h$，因此知

$$\frac{a}{a+\ell}+\frac{b}{b+\ell}=1.$$

利用上式可推得 $\ell=\sqrt{ab}$，故圖 6 中 $\overline{CD}=\sqrt{ab}$，再利用平行線截比例線段性質推得圖 6 中

$$\overline{FD}:\overline{BD}=s:(h-s)=\frac{a}{a+\sqrt{ab}}:\frac{b}{b+\sqrt{ab}}=\sqrt{a}:\sqrt{b}. \tag{12}$$

此時在圖 6 中利用 AA 相似性質可證明 $\Delta DFP\sim\Delta DBG$，因此搭配(12)式可推得

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

從而有 $\overline{FP}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\overline{BG}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot b=\sqrt{ab}$，而此推論結果就清楚說明了在本文第二節問題 1 的解答一開始取 $\overline{FP}=\sqrt{\overline{AF}\cdot\overline{BG}}=\sqrt{ab}$ 這個想法的由來。

除此之外，若在圖 6 中令直線 AG,BF 交於點 O，則可證明 $\Delta OAF\sim\Delta OCD\sim\Delta OGB$。此時令 $\Delta OAF,\Delta OCD,\Delta OGB$ 的三高為 $\overline{OP}:\overline{OR}:\overline{OQ}$，則可利用 $\overline{AF}=a,\overline{GB}=b,\overline{CD}=\sqrt{ab}$ 的條件推得 $\overline{OP}:\overline{OR}:\overline{OQ}=\overline{AF}:\overline{CD}:\overline{GB}=a:\sqrt{ab}:b$，如下圖。

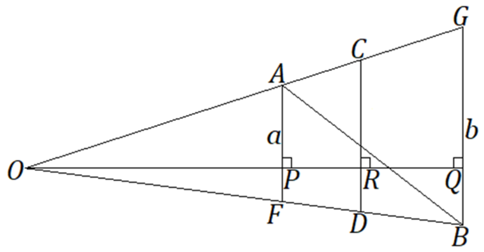

圖 9

利用圖 9 中 $\overline{OP}:\overline{OR}:\overline{OQ}=a:\sqrt{ab}:b$ 的條件可推得 $\overline{OR}=\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$，而此條件就是文獻[2]最簡解答之作圖法所主要使用的條件。至此透過上述搭配圖 6 與圖 9 所提出的說明，我們就可明白本文第二節問題 1 之解答與文獻[2]之最簡解答的兩作圖法之間的關聯性。

伍、結語

本文最初的寫作動機，是因為筆者從多年前由數學傳播編輯部寄回的牛皮信封紙袋中拿出當年投稿[1]文徵答活動的手寫紙本稿件。閱讀該稿件上的解答並理解當年的想法後，便想說何不將此解答分享給同樣對[1]中徵答題有興趣的讀者參考，也可當成[2]文最簡解答的對照組，此即本文第二節內容的由來。而本文第三節的內容，則是由於筆者對本文第二節之圖 3 中的 $\overline{CD}$ 長與 $AFDC, CDBG$ 兩梯形的面積比感到好奇，因此才會特別介紹問題 2 與問題 3，並順便介紹自己先前曾研究過的問題 4。至於第四節的相關探討，則是筆者在參考審稿者的建議後於修改本文初稿時所新增的內容。

值得一提的是，筆者在本文刊登前最後一次修改的過程中，發現文獻[5]同樣對[2]文提出了進一步的探討，讀者有興趣不妨參考之。本文最後，筆者要先感謝[1]文作者與[2]文中最簡解答的作者，因為有他們兩位的貢獻發表在前，筆者才有機會介紹自己當年所寫下的另解，並且進一步提出一些相關探討。此外，筆者也要特別感謝審稿者提出許多有益的修正建言，使本文內容得以更臻完善。

參考文獻

葉東進(2008)。徵求最簡答案。**數學傳播季刊，32**(2)，86。
葉東進(2008)。徵求最簡答案的回響。**數學傳播季刊，32**(4)，88-89。
維基百科(2025)。幾何平均數。https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%87%A0%E4%BD%95%E5%B9%B3%E5%9D%87%E6%95%B0
維基百科(2025)。平方平均數。https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%B3%E6%96%B9%E5%B9%B3%E5%9D%87%E6%95%B0
彭良禎(2010)。回應「土地鑑界」問題徵答。https://hpmsociety.tw/mtm/