

電阻不等式與它的七個題目及解答

林福林^{1*} 林子喬²

¹南臺科技大學

²聯發科技

作者最近為了推廣蕎麥不等式(林福林等, 2024,2025), 接受臉書(Facebook)朋友的建議, 加入兩個國外的臉書群組, 其中一個是 ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE RMM, 幾個月內張貼了超過 60 個全新的題目及解答。蕎麥不等式的英文名稱我們稱作“Lin-Phoong inequality”, 當其中的參數 $p=1$, $q=-1$ 時, 蕎麥不等式等效成電阻不等式(林福林等, 2021)。由於以電阻不等式的思路所創作出的題目對國外的臉書組員來說是新鮮有趣的, 因此獲得較多的讚及喜愛。本文以電阻不等式為篩選目標, 從中選取 7 個已經張貼的題目及解答, 做出較詳細的中文說明, 最後並提供 15 個練習題給有興趣的讀者做練習。

蕎麥不等式的定理重複敘述如下:

考慮任意正實數矩陣 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$, p, q 為任意實數, 定義 p 次冪平均:

$$M_p(a_1, \dots, a_n) = M_p(\{a_i\}_{i=1}^n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ 若 } p > q, \text{ 則下列不等式成立}$$

$$M_q(\{M_p(\{a_{ij}\}_{j=1}^N)\}_{i=1}^M) \geq M_p(\{M_q(\{a_{ij}\}_{i=1}^M)\}_{j=1}^N) \quad (1)$$

等式成立的條件是矩陣 A 的秩 $\text{rank}(A)=1$ 。

當 $p=1$, $q=-1$ 時, 蕎麥不等式也稱作電阻不等式。進入本文主題之前, 我們先做一些簡易的說明。高中生都學過電阻的串並聯, 做成口訣可以唸成「串聯時電阻值相加, 並聯時電阻值倒數相加再倒數」, $p=1$ 即是電阻串聯, $q=-1$ 則是電阻並聯, 結合電阻不等式就可以產生許多新鮮的不等式題目。

*為本文通訊作者

在貼文期間，有臉書朋友建議可以讓高中生也能理解蕎麥不等式，因此作者在 RMM 群組裡也另外為高中生累積張貼了 40 篇貼文(for high school students)，其中第 4 篇如圖 1 所示。為了保留臉書貼文原來的味道，並且避免許多方程式重新編輯造成的錯誤與修訂，底下我們將以截圖的方式呈現題目及解答。圖 1 中不等式的左邊 $a+b+c$ 與 $x+y+z$ 即是列(row)的電阻串聯相加，運算完再做行(column)的倒數相加再倒數(電阻並聯)。不等式的右邊則是行(column)先做倒數相加再倒數，運算完再做列(row)的相加。

P&S-4, for high school students (From LP to Resistor)

Problem-4: Let $a, b, c, x, y, z \in R^+$, prove the following inequality holds.

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{x+y+z}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{y}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{z}} \quad (\text{Resistor inequality})$$

Solution-4: Construct a matrix of order 2×3 , set $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$, and $p=1 > q=-1$,

based on Lin - Phoong inequality, we have

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{x+y+z}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{y}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{z}},$$

equality holds when $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

圖 1：電阻不等式的例題說明

這裡先提供一個練習題當作熱身。這個題目曾經張貼在臉書群組 **mathematical inequalities**，題目與解題過程如圖 2 所示。讀者從練習題中可以看到解題的基本步驟：(1)根據題目設計適當大小與內部元素的矩陣，(2)設定 p 和 q 值，由於本文只討論電阻不等式，因此本文的所有題目皆是 $p=1 > q=-1$ ，(3)透過定理的運算過程即可得到解答，(4)利用矩陣的秩 $\text{rank}(A)=1$ 求得等式成立的條件。以這題為例，等式成立的條件是 $a=b-1 > 0$ 。

Problem: Let $a, b \in \mathbb{R}^+$ and $b > 1$, prove the following inequality holds

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{ab-a}{a+b-1} + \frac{ab+b}{a+b+1}$$

Solution: Construct a matrix of order 2×2 , set $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b-1 & a+1 \end{bmatrix}$ and $p=1 > q=-1$,

based on Lin - Phoong inequality (or Resistor inequality), we have

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b-1+a+1}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-1}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+1}} = \frac{ab-a}{a+b-1} + \frac{ab+b}{a+b+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{ab-a}{a+b-1} + \frac{ab+b}{a+b+1}, \text{ equality holds when } a=b-1 > 0.$$

圖 2：電阻不等式的練習題與解答

進入本文的主題，第 1 題的題目敘述如圖 3 所示，圖中的貼文者”林峰海”是作者的別名，貼文中的副標題提到這是一條美麗的不等式，題目的靈感來自於梵谷非常有名氣的一幅畫：星夜(Starry Night)。曾有人問說為什麼跟梵谷的名畫“星夜”有關，讀者可以從不等式看到 4 個分式，每個分式從右下角的 1 開始，逆時鐘繞一圈，結構都很像，繞著繞著頭就眩暈了。有醫生說梵谷在畫這幅畫時正是暈眩症發作才會畫出這樣的星夜，而梵谷正是我最喜歡的畫家，這也算是一種巧合，僅以這個不等式向梵谷致敬。圖中的 4 個漩渦圖形是利用 Matlab 程式結合複數平面座標產生的，不規則圖形則是引進隨機雜訊製造出來的效果。

第 1 題的解答如圖 4 所示，透過題目的特殊結構與熟練的電阻不等式的技巧，猜想可以使用兩次的電阻不等式並且做線性合成，注意到矩陣 A 與矩陣 B 互為轉置關係，因此兩次得到的結果也會產生一些關聯性。等式成立的條件是 $a=b=c$ ，舉例驗證，當 $a=b=c=1$ ，左式 $=6/2=3$ ，右式 $=1+1+1=3$ ，左右兩式相等。



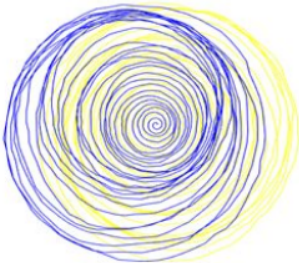
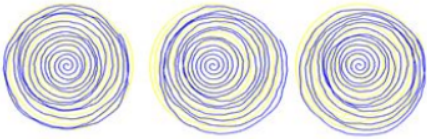
林峰海

最常發言的成員 · 2024年11月20日 ·

Beautiful inequality, inspired by The Starry Night, Vincent Van Gogh

Problem: Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, prove the following inequality holds.

$$\frac{ab + bc + ca + a + b + c}{abc + 1} \geq \frac{ab + a}{a^2b + 1} + \frac{bc + b}{b^2c + 1} + \frac{ca + c}{c^2a + 1}$$




Hòa Văn Nguyễn、Lê Thự和其他32人

4則留言 4次分享



讚



留言



傳送



分享

圖 3：第 1 題的題目敘述(剪裁自 RMM 臉書社群)

Solution: First, construct a matrix of order 3×2 , set $A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{ab} \\ b & \frac{1}{bc} \\ c & \frac{1}{ca} \end{bmatrix}$ and $p=1 > q=-1$,

based on Lin - Phoong inequality (or Resistor inequality), we have

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}}{\frac{1}{a + \frac{1}{ab}} + \frac{1}{b + \frac{1}{bc}} + \frac{1}{c + \frac{1}{ca}}} &\geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{ab + bc + ca} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\frac{ab}{a^2b+1} + \frac{bc}{b^2c+1} + \frac{ca}{c^2a+1}}}{\frac{1}{a + \frac{1}{ab}} + \frac{1}{b + \frac{1}{bc}} + \frac{1}{c + \frac{1}{ca}}} &\geq \frac{abc}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} = \frac{abc + 1}{ab + bc + ca} \\ \Leftrightarrow \frac{ab + bc + ca}{abc + 1} &\geq \frac{ab}{a^2b + 1} + \frac{bc}{b^2c + 1} + \frac{ca}{c^2a + 1} \quad \dots(1) \end{aligned}$$

Secondly, construct a matrix of order 2×3 , set $B = A^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{bc} & \frac{1}{ca} \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \text{Similarly, we have } \frac{\frac{1}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}}}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}} &\geq \frac{1}{\frac{1}{a} + ab} + \frac{1}{\frac{1}{b} + bc} + \frac{1}{\frac{1}{c} + ca} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}}}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}} &= \frac{a+b+c}{abc+1} \geq \frac{a}{a^2b+1} + \frac{b}{b^2c+1} + \frac{c}{c^2a+1} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\text{By (1)+(2), we get } \frac{ab + bc + ca + a + b + c}{abc + 1} \geq \frac{ab + a}{a^2b + 1} + \frac{bc + b}{b^2c + 1} + \frac{ca + c}{c^2a + 1}$$

Equality holds when $a = b = c$.

圖 4：第 1 題的解題過程

第 2 題的題目敘述如圖 5 所示，此題的靈感來自於傳說中的“河內塔 (Tower of Hanoi) ”，根據網路資訊，河內塔是每一個大學資工人一生必搬一次的塔，透過一定的規則，許多高中生也都試著玩過。底下是來自維基百科的資料：

“傳說越南河內某間寺院有三根銀棒，上串 64 個不同直徑的金盤，基本規則是每次只能移動一個圓盤，且較小的圓盤必須始終疊在較大圓盤的上方。寺院裡的僧侶依照一個古老的預言，以上述規則移動這些盤子，預言說當這些盤子移動完畢，世界就會滅亡。”

圖 5 中的不等式是精心設計的，不等式的外形與 6 個圓盤的河內塔相似，此彩色圖形使用 Visio 軟體畫出。這篇貼文獲得 38 人按讚或愛心，在這個專業的臉書社群內，按讚人數若超過 20 人即是相當受歡迎的貼文。第 2 題的解答如圖 6 所示，等式成立的條件是 $2a = b$ ，舉例驗證，當 $a = 1$ ， $b = 2$ ，左式 $= 3/4$ ，右式 $= 1/4 + 1/2 = 3/4$ ，兩式相等；如果 $a = 1$ ， $b = 1$ ，左式 $= 3/4 = 12/16$ 會大於右式 $= 11/15$ 。



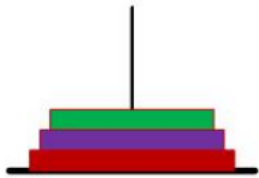
林峰海
最常發言的成員 · 2024年12月4日 · 🌐

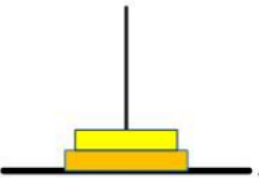
⋮

Beautiful inequality, inspired by the picture of "Tower of Hanoi".

Problem: Let $a, b \in \mathbb{R}^+$, prove the following inequality holds.

$$\frac{3(a+b)}{3ab+a+b+3} \geq \frac{a}{ab+a+1} + \frac{2b}{2ab+b+2}$$







Lê Thự、Rst Khan和其他36人

11則留言 9次分享

 讚

 留言

 傳送

 分享

圖 5：第 2 題的題目敘述(剪裁自 RMM 臉書社群)

Solution: Construct a matrix of order 3×2 , set $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1/b & 1/a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $p = 1 > q = -1$,

based on Lin - Phoong inequality ((or Resistor inequality)), we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} + \frac{1}{1+2}} &\geq \frac{1}{\frac{1}{a} + b + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + a + \frac{1}{2}}, \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{3}} &\geq \frac{a}{ab+a+1} + \frac{2b}{2ab+b+2} \\ \Leftrightarrow \frac{3(a+b)}{3ab+a+b+3} &\geq \frac{a}{ab+a+1} + \frac{2b}{2ab+b+2}, \text{ equality holds when } b = 2a. \end{aligned}$$

圖 6：第 2 題的解題過程

第 3 題的題目敘述如圖 7 所示，此題的靈感來自於雙生子的概念，設計題目時採用的是兩個互為轉置的矩陣，因此不等式的樣子會有些相像，事實上將 a ， b 以他們的倒數替換，兩個雙生子不等式是等效的。圖 7 中兩張彩色圖片稱作等高線圖，以 Matlab 畫出左式減掉右式的結果，橫軸表示變數 a ，縱軸表示變數 b ，比較兩張圖可以看出他們的相似性。從圖中也可以看出當 $a = b = 1$ ，兩個不等式皆達到左右相等；其餘的情況，左式皆大於右式。

第 3 題的解答分成兩部分，第 1 個不等式解答如圖 8 所示，第 2 個不等式解答如圖 9 所示，從解答中可以看出，即使原來的題目無法直接使用電阻不等式，透過不等式的等效替換，即可使用電阻不等式來解題。

當讀者熟悉一般的蕎麥不等式後，可以大約判斷哪些題目是蕎麥不等式做不到的，哪些經過轉換後是可以採用蕎麥不等式的思路來解題，需設定多大的矩陣，需採用甚麼樣的實數 p 及 q 。由於本文討論的都是 $p = 1 > q = -1$ 的情況，即電阻不等式，因此只要考慮如何找出矩陣即可。

Twins of inequality, just for fun.

Problem(twin-1): Let $a, b \in \mathbb{R}^+$, prove the following inequality holds.

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{a+b}$$

Problem(twin-2): Let $a, b \in \mathbb{R}^+$, prove the following inequality holds.

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{a+b}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{ab}{a+b}$$

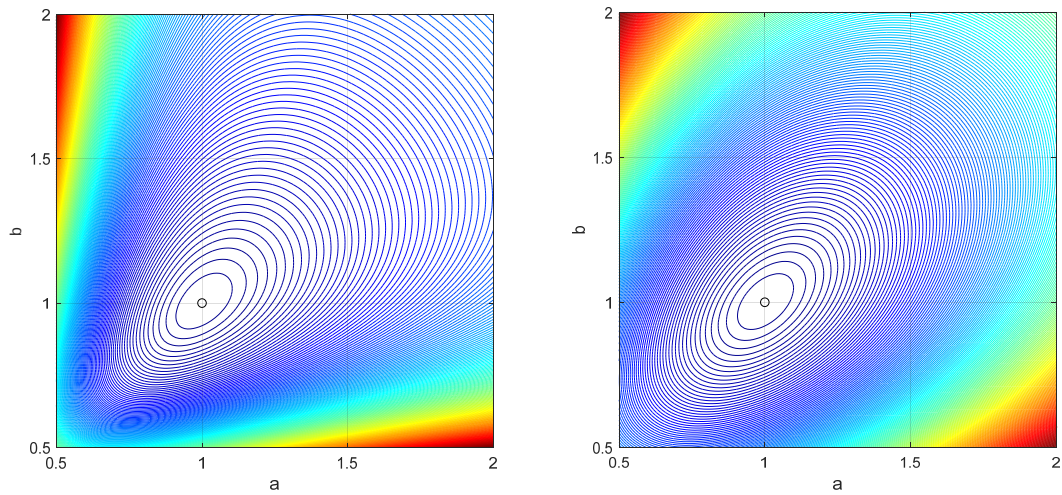


圖 7：第 3 題的題目敘述

Solution(twin-1):

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow 2 - \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{a+b}{2ab} \right) \leq 2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} + \frac{a+b}{2ab} = \frac{a+b+ab}{2ab} \quad (*)$$

Construct a matrix of order 3×2 , set $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, and $p = 1 > q = -1$,

based on Lin - Phoong inequality (or Resistor inequality), we have

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+1}} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} = \frac{2ab}{a+b+ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b+ab}{2ab} \quad (*), \text{ equality holds when } a = b = 1.$$

圖 8：第 3 題第 1 個雙生子不等式的解題過程

Solution(twin-2):

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{a+b}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{a+b}{2} \right) \leq 2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{ab}{a+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2} + \frac{a+b}{2} = \frac{a+b+1}{2} \quad (*)$$

Construct a matrix of order 2×3 , set $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$, and $p = 1 > q = -1$,

based on Lin - Phoong inequality (or Resistor inequality), we have

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{a+b+1}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{a+b}{ab} \leq \frac{a+b+1}{2} \quad (*), \text{ equality holds when } a = b = 1.$$

圖 9：第 3 題第 2 個雙生子不等式的解題過程

從第 4 題開始到第 7 題，我們直接附上題目與解答。第 4 題的敘述與解答分別如圖 10(a) 與圖 10(b)所示，此題獲得最多的 42 個讚及喜愛，原因可能是題目看起來形式簡單，一般的不等式高手也可以採用他們熟悉的技巧做出來。解答第一行提到的 Muirhead 不等式，有興趣的讀者可以研讀參考文獻(陳柏宇等，2014)。此題的解答是借用 Muirhead 不等式與電阻不等式結合來獲得最後的結果。

Problem: Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, prove the following inequality holds.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2}{a^2 + bc} + \frac{2}{b^2 + ca} + \frac{2}{c^2 + ab}$$

圖 10(a)：第 4 題的題目

Solution:

By Muirhead inequality, $\{2,2,0\} \succ \{2,1,1\} \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{abc}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ (*)

Construct a matrix of order 2×3 , set $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{bc}{a} & \frac{ca}{b} & \frac{ab}{c} \end{bmatrix}$ and $p=1 > q=-1$,

based on Lin - Phoong inequality (or Resistor inequality), we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b+c} + \frac{abc}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} &\geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{2abc} &\geq \frac{abc}{a^2 + bc} + \frac{abc}{b^2 + ca} + \frac{abc}{c^2 + ab} \quad (*) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &\geq \frac{2}{a^2 + bc} + \frac{2}{b^2 + ca} + \frac{2}{c^2 + ab}, \text{ equality holds when } a=b=c. \end{aligned}$$

圖 10(b)：第 4 題的解題過程

第 5 題的敘述與解答分別如圖 11(a) 與圖 11(b)所示，此題獲得次多的 41 個讚及喜愛，原因應該和第 4 題相同，眼尖的讀者應該也注意到，第 5 題與第 4 題對應到的矩陣形式再次互為轉置矩陣。解答的第 4 行使用了一個大家熟知的結果： $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ，此結果可以採用多種方法來得到，例如排序不等式，當然也可以採用蕎麥不等式的思路，

設定 $A = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & a^2 \end{bmatrix}$ 及 $p=1>q=0$ ，根據蕎麥不等式(或柯西不等式)可以得到

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq \sqrt{a^2 b^2} + \sqrt{b^2 c^2} + \sqrt{c^2 a^2}，化簡可得。$$

Problem: Let $a, b, c \in R^+$ ，prove the following inequality holds.

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab}$$

圖 11(a)：第 5 題的題目

Solution:

Construct a matrix of order 3×2 , set $A = \begin{bmatrix} a & \frac{bc}{a} \\ b & \frac{ca}{b} \\ c & \frac{ab}{c} \end{bmatrix}$ and $p=1>q=-1$ ，

based on Lin - Phoong inequality (or Resister inequality), we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{a+\frac{bc}{a}} + \frac{1}{b+\frac{ca}{b}} + \frac{1}{c+\frac{ab}{c}}} &\geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab}} &\geq \frac{abc}{ab+bc+ca} + \frac{abc}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} &\geq \frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \end{aligned}$$

Equality holds when $a=b=c$ 。

圖 11(b)：第 5 題的解題過程

第 6 題的敘述與解答分別如圖 12(a) 與圖 12(b)所示，此題給定條件 $a+b+c=9$ ，因此在尋找適當的矩陣時需要一些經驗，如果讓 a, b, c 適當的安排分散在列(row)裡面，則可以迎刃而解。另一個解題關鍵是矩陣的行相加對應到 4 個分式的分母，由於目前為止很少人會拿電阻不等式來出題或解題，造成此題的困難度相對較高，作者希望一年後可以看到高中數學比賽或中學教甄考試出現以蕎麥不等式的思路而出的題目。

Problem: Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $a + b + c = 9$, find the maximum value of

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{ab+2b}{a+b+2} + \frac{bc+2c}{b+c+2} + \frac{7c+14}{c+9}$$

圖 12(a)：第 6 題的題目

Solution:

Construct a matrix of order 2×4 , set $A = \begin{bmatrix} a & b & c & 7 \\ 1 & a+2 & b+2 & c+2 \end{bmatrix}$ and

$p=1 > q=-1$, by Lin - Phoong inequality (or Resistor inequality), we have

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b+c+7} + \frac{1}{a+b+c+7}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{1}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+2}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b+2}} + \frac{1}{\frac{1}{7} + \frac{1}{c+2}}$$

$$\Leftrightarrow 8 \geq \frac{a}{a+1} + \frac{ab+2b}{a+b+2} + \frac{bc+2c}{b+c+2} + \frac{7c+14}{c+9}, S_{\max} = 8 \text{ when } a=1, b=3, c=5.$$

圖 12(b)：第 6 題的解題過程

第 7 題的敘述與解答分別如圖 13(a) 與圖 13(b) 所示，此題給定條件 $ab + bc + ca = 2(a + b + c)$ ，因此在尋找適當的矩陣時需要用到這個條件，由不等式的左式去猜測矩陣的元素，再由不等式的右式去驗證答案，由於不等式都經過特殊設計，因此不難找到對應的矩陣。此題等式成立的條件是 $a = b = c$ ，代回給定條件得到 $3a^2 = 6a$ ，因此 $a = b = c = 2$ 。

Problem: Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $ab + bc + ca = 2(a + b + c)$, prove the following inequality holds.

$$\frac{a}{1+ca} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc} \leq \frac{2(a+b+c)}{abc+2}$$

圖 13(a)：第 7 題的題目

Solution:

Construct a matrix of order 3×2 , set $A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{b} \\ b & \frac{1}{c} \\ c & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$ and $p=1 > q=-1$,

based on Lin - Phoong inequality (or Resister inequality), we have

$$\frac{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc} + \frac{a}{1+ca}}}{\frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc} + \frac{a}{1+ca}} \geq \frac{abc}{ab+bc+ca} + \frac{1}{a+b+c} = \frac{abc+2}{2(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{1+ca} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc}}{\frac{a}{1+ca} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc}} \leq \frac{2(a+b+c)}{abc+2}, \text{ Equality holds when } a=b=c.$$

圖 13(b)：第 7 題的解題過程

最後做個結論，本文試著推廣“電阻不等式”給更多人知道，透過設計題目並提供參考解答的方式，藉由國外臉書群組的審核來檢驗題目及解答是否合理，也從群組裡學到一些不同的解法，並且獲得自己也認為很神奇的出題靈感。文末並提供 15 個題目給想要挑戰電阻不等式的讀者做練習。如果想要參考答案，作者幾個月下來在 RMM 張貼了超過 100 篇以上的相關貼文，裡面會有詳細的解題過程。

參考文獻

- 林福林、林子喬(2024)。廣義閔可夫斯基不等式的介紹及推廣。**數學傳播**，48(3)，24-35。
 林福林、林子喬(2025)。矩陣與不等式-創作一個屬於你自己的專屬不等式。**數學傳播**，49(1)，50-57。
 林福林、林子喬(2021)。矩形電阻網路串並聯順序及相關不等式的推導。**數學傳播**，45(2)，21-28。
 陳柏宇、張福春(2014)。Muirhead 不等式。**數學傳播**，41(2)，41-58。

附錄：電阻不等式的 15 個練習題

題 1：Let $a, b \in R^+$ ，prove the following inequality holds,

$$(a+1)(b+1) \geq \sqrt{(2ab+a+b)(a+b+2)}.$$

題 2：Let $a, b, c \in R^+$ ，find the maximum value of

$$S = \left(\frac{1}{a+b+c+1} + \frac{abc}{ab+bc+ca} \right) \times \left(\frac{a+c}{ac+1} + \frac{b+1}{b^2+b+1} \right).$$

答案： $S_{\max} = 1$ when $ac = b(b+1)$, for example, $a = 2, b = 3, c = 6$.

題 3：Let $a, b, c \in R^+$ such that $ab+bc+ca=3abc$ ，find the maximum value of

$$S = \frac{32}{a+b+c+5} + \frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1}.$$

答案： $S_{\max} = 7$ when $a = b = c = 1$.

題 4：Let $a, b, c \in R^+$ such that $ab+bc+ca=2(a+b+c)$ ，prove the following inequality holds,

$$\frac{9}{a+b+c} \leq \frac{3}{a+bc} + \frac{3}{b+ca} + \frac{3}{c+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

題 5：In any acute triangle $\triangle ABC$, let $a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C$ ，prove the following inequality holds,

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}.$$

題 6：Let $a, b, c, x, y, z \in R^+$ such that $a+b+c = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ，find the maximum value of

$$S = \frac{a}{ax+a+1} + \frac{2b}{2by+b+2} + \frac{3c}{3cz+c+3}.$$

答案： $S_{\max} = \frac{6}{13}$ when $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$ or $x = 6, y = 3, z = 2$.

題 7 : Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, prove the following inequality holds,

$$\frac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2}{ab+bc+ca}.$$

題 8 : Let $a, b \in \mathbb{R}^+$ and satisfying the inequality

$$\left(\frac{1}{a+b+4} + \frac{3ab}{ab+3(a+b)}\right) \times \left(\frac{a+b}{ab+1} + k\right) \leq 1,$$

where k is a constant, find the value of k .

答案 : $k = \frac{4}{13}$, when $ab=12$, for example, $a=2$, $b=6$.

題 9 : Let $a, b \in \mathbb{R}^+$, find the minimum value of $S = a + b + \frac{8}{a+2} + \frac{32}{b+5} - \frac{2ab+2b}{a+b+1}$.

答案 : $S_{\min} = 8$ when $a=2$, $b=3$.

題 10 : Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $ab+bc+ca=3$, prove the following inequality holds,

$$3(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2abc(a^2+b^2+c^2+9).$$

題 11 : Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $ab+bc+ca=2(a+b+c)$, prove the following inequality holds,

$$\frac{a}{1+ca} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc} \leq \frac{2(a+b+c)}{abc+2}.$$

題 12 : Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, prove the following inequality holds,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{a^2}{a^3+2} + \frac{b^2}{b^3+2} + \frac{c^2}{c^3+2}.$$

題 13 : Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $a^2b + b^2c + c^2a \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$, prove the following Inequality holds,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}.$$

題 14 : Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ such that $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = 8$, find the maximum value of

$$S = \frac{5(b+c)}{5a+b+c} + \frac{2(c+a)}{2b+c+a} + \frac{(a+b)}{c+a+b}.$$

答案 : $S_{\max} = 4$, when $a = 1, b = 2, c = 3$.

題 15 : Let $a, b \in \mathbb{R}^+$ and $b > 1$, prove the following inequality holds,

$$\frac{a+b}{ab+1} \geq \frac{a+1}{a^2+a+1} + \frac{b-1}{b^2-b+1}.$$