

對一道三角問題的探究

連威翔

優食好物台灣股份有限公司

壹、前言

在 YouTube 網站上的影片[1]中，作者介紹了底下這道取自 JEE Advanced 2017 試題之三角問題的解法：

問題 1： Let α, β be two nonzero real numbers such that

$$2(\cos \beta - \cos \alpha) + \cos \alpha \cos \beta = 1,$$

then which of the following is/are true?

- (a) $\tan \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 0$ (b) $\sqrt{3} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = 0$
 (c) $\tan \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 0$ (d) $\sqrt{3} \tan \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\beta}{2} = 0$

講解者在影片[1]中推得選項(a),(c)的兩式至少有一式成立後，便告訴我們答案應選(a),(c)。若想要找到上述問題的出處，讀者可上網搜尋”Past Question Papers JEE Advanced”這串關鍵字，或直接打開網頁[2]並點選 2017 年的 Paper 2 試題。

看完影片[1]後，筆者也研究了問題 1 並找出了另解，但在求解過程中筆者發現問題 1 的敘述似乎有問題，因為察覺到該問題的答案不應選(a),(c)。繼續研究之後，筆者找出了一個方法來修改問題 1 的敘述，修改後即可使問題 1 的答案為(a),(c)。底下第二節中，筆者將分享上述的想法供有興趣的讀者參考。

貳、透過討論修正原問題的敘述

注意問題 1 的(a),(b),(c),(d)四個選項中都出現了 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}$ 這兩個數，因此原問題的條件應包括設定 α, β 之值的條件使 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}$ 兩三角比之值存在。不過請注意問題 1 所設定之 α, β 非零的條件並無法保證 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}$ 這兩個數存在，一個簡單的例子是取 $\alpha = \pi$ ，此時 α 非零但 $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，因此 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 不存在，此時我們將無法繼續判斷(a),(b),(c),(d)四個選項中的各式是否成立。另一方面，由於 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}$ 兩數存在的充要條件是 $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ 兩數存在且非零，因此筆者認為問題 1 的題幹應修改如下：

問題 2： Let α, β be two real numbers such that $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ are nonzero and

$$2(\cos \beta - \cos \alpha) + \cos \alpha \cos \beta = 1, \tag{1}$$

then which of the following is/are true?

其實，還有一個事實顯示出我們應該要改考慮問題 2。注意影片 [1] 中的解法從 4 分 28 秒起至 4 分 40 秒止的這段時間內講解者做了兩個動作，此兩動作是把兩個分數的分子與分母分別同時除以 $\cos^2 \frac{\beta}{2}$ 與 $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ，而這兩個動作必須在 $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ 兩數非零的條件下才能實施。至此，我們就可進一步確定應該修改問題 2 的敘述。

接下來的討論內容，我們就以上述問題 2 的敘述取代原本問題 1 題幹部分的敘述，至於選項 (a), (b), (c), (d) 的部分則沿用問題 1 的四個選項，因此在上述問題 2 中筆者並未列出其選項。此時若問上述問題 2 的解答為何，我們可先將 (1) 式改寫為

$$(\cos \alpha + 2)(\cos \beta - 2) = -3, \quad (2)$$

接著使用半角公式列出

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1, \quad \cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1,$$

將以上兩式代入 (2) 式，可得

$$\left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1\right) \left(2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 3\right) = -3. \quad (3)$$

觀察上式，可知其等號左側括號內的兩式之值不為零，我們令

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = t,$$

其中 $t \neq 0$ ，因此由 (3) 式可知

$$2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 3 = \frac{-3}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{-3}{t}.$$

由上兩式可寫下

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{t-1}{2}, \quad \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{3t-3}{2t}.$$

由於問題 2 中設定 $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ 兩數非零，因此由以上兩式可知 $t \neq 1$ 。此時對上兩式的等號兩邊同時取倒數可得

$$\sec^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{t-1}, \quad \sec^2 \frac{\beta}{2} = \frac{2t}{3t-3},$$

因此有

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \sec^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{3-t}{t-1},$$

$$\tan^2 \frac{\beta}{2} = \sec^2 \frac{\beta}{2} - 1 = \frac{3-t}{3t-3}.$$

至此，利用上兩式的結果可寫下

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \tan^2 \frac{\beta}{2} = 0, \quad (4)$$

或者寫成

$$\left(\tan \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} \right) \left(\tan \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} \right) = 0.$$

所以有

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 0 \quad (5)$$

或

$$\tan \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 0. \quad (6)$$

請讀者注意，在影片[1]的最後，講解者也推得了(5),(6)兩式。

在上面的討論過程中我們使用了參數 t ，其實我們也可以不使用這個參數 t 來求得同樣的結果。讓我們回到(3)式，注意此時 $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ 的倒數 $\sec \frac{\alpha}{2}, \sec \frac{\beta}{2}$ 存在，我們對(3)式等號兩端同乘 $\sec^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\beta}{2}$ 後，可得

$$\left(2 + \sec^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left(2 - 3 \sec^2 \frac{\beta}{2} \right) = -3 \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\beta}{2}. \quad (7)$$

接著先列出底下兩式

$$\sec^2 \frac{\alpha}{2} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1, \quad \sec^2 \frac{\beta}{2} = \tan^2 \frac{\beta}{2} + 1,$$

再將上兩式代入(7)式，可得

$$\left(\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 3 \right) \left(-1 - 3 \tan^2 \frac{\beta}{2} \right) = -3 \left(1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\beta}{2} \right).$$

上式展開並化簡後，可得與(4)式完全相同的

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \tan^2 \frac{\beta}{2} = 0,$$

因此繼續討論後即可再次推得(5),(6)兩式。

不過，當影片[1]的後段講解者得到(5),(6)兩式後，接著馬上說明答案應選(a),(c)，此時筆者心中產生了疑問。要知道若答案選(a),(c)為的話，代表(5),(6)兩式必定皆成立，但此時很容易找出反例。例如，我們可取 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{2}$ 使

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = 1,$$

此時(6)式成立，但另一方面有

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 2\sqrt{3} \neq 0,$$

因此(5)式不成立。類似地，我們也可取 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{5\pi}{2}$ 使

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = -1,$$

此時(5)式成立，但另一方面有

$$\tan \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 2\sqrt{3} \neq 0,$$

因此(6)式不成立。透過上述的討論，我們知道問題 2 的答案應不應選(a),(c)。不過，若將問題 2 題幹最後的單字 true 改為 possible，則根據上述討論即可知答案可選(a),(c)，而經修改後的問題其敘述如下：

問題 3： Let α, β be two real numbers such that $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ are nonzero and

$$2(\cos \beta - \cos \alpha) + \cos \alpha \cos \beta = 1,$$

then which of the following is/are possible?

但若將問題 2 修改為問題 3 的話，則我們也可以取 $\alpha = \beta = 2\pi$ 使

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\beta}{2} = 0,$$

注意此時 $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}$ 非零且(5),(6)兩式成立，因此(a),(c)兩選項成立，但這時候我們會發現(b),(d)兩選項也成立，如此一來答案將會變成(a),(b),(c),(d)，此答案又與原本影片[1]所給的答案(a),(c)不同。

所以說，筆者認為問題 3 的敘述應再次進行修改，才能夠使答案選(a),(c)。筆者思考過後，發現可將問題 3 修改為如下的問題：

問題 4： Let α, β be two real numbers such that $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}$ are nonzero and

$$2(\cos \beta - \cos \alpha) + \cos \alpha \cos \beta = 1,$$

then which of the following is/are possible?

注意在問題 4 題幹的敘述中比問題 3 多了 $\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}$ 非零的前提，且注意在上面的問題 3 與此處的問題 4 底下仍省略選項(a),(b),(c),(d)，這部分請讀者參考問題 1。

對於問題 4 而言，我們可再次透過上面的推論過程確定(5)式或(6)式成立，因此確定答案包含(a),(c)。但此時請注意(5),(6)兩式不會同時成立，這是因為若(5),(6)兩式同時成立，則可將兩式聯立並解得

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\beta}{2} = 0,$$

因此知 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} = 0$ ，而此結果與問題 4 中新增之 $\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}$ 兩數非零的條件矛盾，因此可知(5),(6)兩式不會同時成立，即問題 4 的選項(a),(c)不會同時成立。不過，請注意此時在問題 4 題幹敘述的最後一字為 possible 的條件下，我們確實可選(a),(c)兩選項，這是因為(5)式與(6)式均可能成立。

而透過類似的討論，我們也可確定問題 4 的選項(b),(d)中的兩式皆不成立。怎麼說呢？假設選項(b)中的條件 $\sqrt{3} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = 0$ 成立，以此條件與(5)式或(6)式搭配(注意透過以上的討論可知(5),(6)兩式恰有一式成立)，可得

$$\begin{cases} \sqrt{3} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = 0 \\ \tan \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases},$$

或者

$$\begin{cases} \sqrt{3} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = 0 \\ \tan \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \tan \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases}.$$

求解以上兩聯立方程式，均能解得 $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\beta}{2} = 0$ ，因此得 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} = 0$ ，此時再次得到矛盾。同理，假設選項(d)的條件成立，以該條件與(5)式或(6)式搭配均能推得 $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\beta}{2} = 0$ 與 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} = 0$ ，此時仍然得到矛盾。至此，我們可確定對問題 4 而言選項(b),(d)皆不成立，由於此兩選項不可能成立，因此自然就不屬於 possible 的選項。

透過上述討論，我們就確定了問題 4 的答案應選(a),(c)。而為了確定影片[1]中的講解者是否因為不小心而寫錯了問題 1 的題目，筆者透過[2]找出 JEE Advanced 2017 的試題，經確認後發現[1]中的試題並未寫錯。因此根據上述討論，我們知道出自 JEE Advanced 2017 試題的問題 1 的其問題設計應該是有瑕疵的，而若將問題 1 題幹的敘述修改為問題 4 的敘述，就可以確定正確答案應選(a),(c)。

參、一些小小心得

參考[3]文一開始的介紹，可知數學家希爾伯特曾說過：「問題是數學的心臟和靈魂，沒有問題就沒有數學」。而我們在學習數學的過程中，需面臨無數次練習解題的過程，這個過程是透過「面對問題並進行思考，練習如何找出適當的數學工具來求得解答」的過程來從中獲取經驗。如果解題成功，則可以獲得信心，並繼續努力學習新的知識與技能；如果解題不成功，也能藉此知道自己的不足之處，並透過聆聽老師的解說或與同學進行討論，藉此得知下次在面對類似的問題時應如何處理。

注意[3]文從課堂上一道設計錯誤的問題出發，並告訴我們那道問題為何會設計錯誤。因此，我們知道[3]文內容與本文前一節的內容皆係針對「如何找出問題的瑕疵」來提出相關的討論。而這樣子的討論是很有意義的，因為透過這樣的討論，可讓我們知道在設計出一道問題之後應檢查其設計是否嚴謹，是否有漏洞或自相矛盾。這對將來想進入教育界的數學人才而言應該是很有意義的訓練，因為可幫助自己將來在設計問題時避免設計出可能導致事後可能必須「全體一律給分」的試題。

談到必須「全體一律給分」的入學試題，筆者想到[4]文所介紹的一道聯考試題，當年該試題因為設計不嚴謹，所以最後試務單位決定全國一律給分，此試題的敘述如下：

問題 5：設方程式

$$x^4 + 3x^3 + bx^2 + cx + 10 = 0 \quad (8)$$

有四個相異有理根，則其最大根為_____。

注意[4]文作者在不改變問題 1 原本設計之條件的情況下，向讀者說明求得方程式(8)之一組有理根的方式，且推得「其中的最大根可為任意大的正有理數」。筆者發現[4]文作者的想法非常巧妙，也對作者「打破砂鍋問到底」的精神感到佩服。有興趣的讀者，也可以挑戰看看是否有其他方式可設計出讓「方程式(8)之最大根可以任意大」的另一組有理根。而透過[4]文所找出的那組有理根，我們就知道問題 1 的設計確實有問題，這也說明了當年試務單位決定全國一律給分的決定是很合理的。因為問題 1 的最大有理根可以任意地大，所以我們無法寫下問題 1 確定的答案。

肆、結語

本文只是簡單的心得分享，筆者撰文的動機，是在看完影片[1]之後想對該影片中所介紹的 JEE Advanced 試題(即問題 1)在設計上是否有瑕疵提出自己的看法，並試著提出自己對原問題的一個修改方式使原本的答案變得合理，希望讀者閱讀過後能有所收穫。

本文最後想要提醒讀者，當您遇到設計上有瑕疵的問題，此時您除了直接跳過對該問題不予理會以外，也可以像[3]文作者與筆者這樣設法找出原問題有瑕疵的地方。或者也可像[4]文作者那樣，直接就有瑕疵的原問題設法找出答案，然後藉由這組答案說明原問題的設計確實有問題，相信都會是不錯的練習。

參考文獻

- Math Booster(2022). A Nice Trigonometry Challenge | JEE Advanced 2017 Problem[Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=wOCQPyF5bfk>.
- Indian Institute of Technology Roorkee(2017). Joint Entrance Examination (Advanced). <https://jeeadv.ac.in/archive.html>.
- 徐彥輝(2015)。從課堂教學中的一道錯題出發談數學問題的提出。**數學傳播季刊**，39(3)，82-91。
- 張海潮(2004)。聯考題目為何送分？**數學傳播季刊**，28(2)，63-65。